Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **II**, 5.

TALET

INLEDNING TILL TEORIEN FÖR ANALYTISKA FUNKTIONER

AF

G. MITTAG-LEFFLER

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1920

EFTERFÖLJANDE uppsats är ämnad utgöra de tre första kapitlen af en framställning af Weierstrass' teori för de analytiska funktionerna. Huru nära framställningen än ansluter sig till Weierstrass' tankegång, är den dock icke en reproduktion af någon af hans föreläsningar. Jag har förnämligast eftersträfvat att låta sammanhanget mellan Weierstrass' grundläggande uppfattning och Cantors senare arbeten klart framträda.

Uppfattningen af begreppet helt tal är antagligen icke densamma som hos Weierstrass. Ett litograferadt häfte »Einleitung in die Arithmetik. Erster Teil«, hvilket synes innehålla ett af de mest autentiska referaten af en föreläsning af Weierstrass, inledes med följande ord: »Die Arithmetik hat keine andere Voraussetzung als den Begriff der Zahl. Was aber die Zahl ist, machen wir uns klar, indem wir uns vergegenwärtigen, was wir thun, wenn wir zählen, denn die Zahl ist das Resultat des Zählens«. I en not hänvisas till ett arbete af Zeller, »Logik und Erkenntnistheorie, I, § 13«.

Denna upfattning torde hos Weierstrass alltjämt ha varit den grundläggande. Det förefaller mig emellertid, som om den tankegång, hvilken jag omfattar, bättre träffar talets af all yttre erfarenhet oafhängiga och rätta väsen. Man vinner genom densamma utom annat, att oändlighetsbegreppet samtidigt med talbegreppet framträder omedelbart klart och aprioriskt gifvet. Utgår man däremot vid fastställande af begreppet tal från det ur yttre erfarenhet abstraherade begreppet antal, blir oändligheten oförklarad, och det Weierstrassiska systemet förlorar härmed sitt viktigaste grundlag.

Efter Cantor har mycket debatterats, huruvida icke det grundläggande begreppet helt tal kunde ersättas af ett allmännare, mer omfattande första begrepp, exempelvis mängd. Så intressanta och lockande de försök också äro, hvilka härstämma från en sådan sträfvan [1], synas de mig dock från början vara förfelade. Mängd är icke liksom tal ett aprioriskt gifvet begrepp. Det förutsätter en definition, vid hvilken man nödgas taga till hjälp andra, lika litet aprioriskt gifna begrepp. Detsamma blir fallet vid alla andra försök att ersätta talet med något annat grundbegrepp för tänkandet.

Ett uttryck för denna uppfattning har jag gifvit i de ord

»Talet är tänkandets början och slut
Med tanken föddes talet
Utöfver talet når tanken icke«,

hvilka jag låtit inrista vid ingången till det hem för matematisk forskning, hvilket blifvit uppfördt i Djursholm.[2]

En annan, ehuru oväsentlig, afvikelse från Weierstrass är, att han vid definition och framställning af lagarna för det inkommensurabla talet i stället för hvad jag betecknat med gruppteckneт (( )), begagnar sig af det redan i analysen hemmahörande summationstecknet. Jag har valt

[1] Cf. exempelvis E. Borel, »Leçons sur la théorie des fonctions.« 2e éd. Note IV. Paris 1914.

[2] Makarna Mittag-Lefflers matematiska institut. Cf. Acta Mathematica, Bd. 40. 1916. P. III—X.

tecknet (( )) för att den redan skolade matematikern lättare må undvika de felslut, till hvilka ett invandt teckensystem eljest lätt kan ge anledning.

KAPITEL I

Det hela talet.

1. Talet, det hela talet är ett enkelt, aprioriskt begrepp, som icke i ord eller afbild kan definieras, men utgör själfva tänkandets grundform.

Begreppet helt tal erhålles ur en inre åskådning därigenom, att man i föreställningen fasthåller ett gifvet ting, enheten, det första talet och så än en gång samma ting, hvarigenom det andra talet uppkommer, och härefter än en gång samma ting, hvarigenom det tredje talet blifver till, samt härefter fortskrider på samma sätt.

De hela tal, som blifvit bildade medelst samma enhet, sägas tillhöra samma talsystem. De följa hvarandra i en bestämd ordning, så att man om hvarje tal kan angifva, hvilket som är det föregående och hvilket som är det efterföljande. Mot hvarje tal, utom det första, svarar ett närmast föregående annat tal, och mot hvarje tal, inbegripet det första, svarar ett närmast efterföljande annat tal.

Den process, genom hvilken talen bildas, har icke något slut. Man kan alltid fortsätta densamma utöfver den punkt, där man en gång stannat, det finnes icke något tal, som icke har ett efterföljande. I detta förhållande möta vi redan vid tänkandets början oändlighetsbegreppet i dess första form, det matematiska oändlighetsbegreppet, det enda oändlighetsbegrepp, som för tanken är fattbart. Detta oändlighetsbegrepp är gifvet i och med begreppet helt tal och framstår för tänkandet med lika klarhet som talbegreppet självt.

Begreppen likhet och olikhet beträffande tal, som tillhöra samma talsystem, fastställa vi så, att talen a och b endast då äro lika hvarandra, när de äro samma tal. Detta tecknas $a = b$ eller $b = a$. Talen äro däremot olika hvarandra, om det ena talet icke är detsamma som det andra. Detta tecknas $a \neq b$ eller $b \neq a$. Om a föregår b, eller b efterföljer a, tecknas detta $a < b$ eller $b > a$.

2. Vi ha hittils låtit enheten vara ett visst ting hvilket som hälst. Om man vid detta ting icke fäster någon annan bestämning än att vara det, som vid talets bildande fasthålles i föreställningen, betecknas enheten med ett, och de tal, hvars enhet är ett, benämnas absoluta tal.

Begreppen större och mindre äro icke för absoluta tal aprioriska begrepp, hämtade från någon allmän storhetsteori. De vinnas genom definition på sådant sätt, att af två med hvarandra olika tal är det föregående det mindre och det efterföljande det större.

Teoremet »att det ej finnes något tal, som icke har ett efterföljande«, kommer härigenom att för absoluta tal kunna uttalas så, att »det icke finnes något tal, som är större än alla de öfriga«.

3. En gång i besittning af begreppet helt tal, kommer man omedelbart genom definition till begreppet summa af två tal. »Summan af tvänne tal är det nya tal, som erhålles, om man fortsätter det upprepande af enheten, som ägde rum vid det första talets bildande, lika ofta som det upprepande af enheten, hvilket erfordras för att bilda det andra talet.« Man kan också uttrycka detta så: »Sum-

man af ett gifvet tal och enheten är det tal, hvilket närmast efterföljer det gifna talet. Summen af tvänne tal, af hvilka det sista icke är enheten, är åter det tal, som närmast efterföljer det, som är summan af det första talet och det tal, som närmast föregår det sista.«

Ur vår definition på summa följer omedelbart: »Summan af tvänne tal är alltid samma entydigt gifna tal.«

Denna definition på summa framträder visserligen formelt som en enda definition, men är i verkligheten en obegränsad kedja af definitioner, en definition för hvarje talkombination. Detta är ett förhållande, som vi i det följande öfverallt skola återfinna och som utom annat ger den matematiska analysen medel att under sitt välde lägga städse nya områden af obegränsad omfattning.

4. Sedan begreppet summa en gång blifvit fastställdt, kunna tvänne hufvudteorem härledas, ur hvilka en summas öfriga egenskaper utan vidare härflyta. Det första hufvudteoremet, som innehåller den s. k. associationslagen, lyder:

»Om a, b, c äro trenne gifna tal, så är summan af talet a och det tal $b + c$, hvilket utgör summan af b och c, lika med summan utaf talet $a + b$ — det tal, som är summan af a och b, — samt c, eller

$$a + (b + c) = (a + b) + c.«$$

Låt oss nämligen med e beteckna enheten för de tal, som äro i fråga. Om talet c är enheten e, innehåller associationsteoremet intet annat än ett upprepande af definitionen på summa af två tal. Låt oss nu antaga, att satsen gäller för talen a, b och c. Den gäller då äfven för a, b och $c + e$, det vill säga man har $a + [b + (c + e)] = (a + b) + (c + e)$.

Ty

$$\begin{aligned} a + [b + (c + e)] &= a + [(b + c) + e] && \text{(def. på summa)} \\ &= [a + (b + c)] + e && (\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}) \\ &= [(a + b) + c] + e && \text{(vårt antagande)} \\ &= (a + b) + (c + e) && \text{(def. på summa)} \end{aligned}$$

Nu gäller vår sats, då c är enheten e, den gäller således äfven då c är $e + e$, således också, då c är $e + e + e$ etc. och således för hvarje tal c, huru talen a och b än må ha blifvit valda.

Vi träffa här för första gången ett sätt att sluta, som plägar kallas den fullständiga induktionen eller slutsättet från n till $n + 1$. Detta sätt att sluta eller denna bevismetod är följande. Man bevisar, att om en sats gäller för ett tal n, hvilket som hälst, så gäller det äfven för närmast följande tal $n + 1$. Nu gäller satsen för ett visst tal $\overline{n}$, i vårt föregående fall talet 2, den gäller då för $\overline{n} + 1$ och gäller vidare för härpå närmast följande tal och fortsättningsvis eller med andra ord för alla tal, som följa efter det gifna talet $\overline{n}$.

Detta slutsätt från n till $n + 1$ är en af matematikens främsta och oundgängliga bevismetoder.

Vårt andra teorem innehåller den s. k. commutationslagen och lyder: »Om a och b äro tvänne tal inom samma talsystem, så är summan af a och b lika med summan af b och a, eller $a + b = b + a$.«

Om e liksom förut är enheten i talsystemet, så gäller att börja med satsen uppenbarligen, om $a = e$ och samtidigt $b = e$. Vidare är tydligt, att om teoremet gäller för $b = e$ samt ett gifvet a, så gäller det äfven för $b = e$ och $a + e$.

Man har nämligen:

$$(a + e) + e = (e + a) + e \qquad \text{(antagande)}$$
$$= e + (a + e) \qquad \text{(def. på summa)}$$

Då nu teoremet gäller för $b = e$ och $a = e$, gäller det följaktligen äfven för $b = e$ och ett hvilket som hälst tal a.

Om nu åter teoremet gäller för ett a, hvilket som hälst, och ett gifvet b, gäller det äfven för samma a och $b + e$. Man har nämligen:

$$a + (b + e) = (a + b) + e \qquad \text{(def. på summa)}$$
$$= (b + a) + e \qquad \text{(antagande)}$$
$$= b + (a + e) \qquad \text{(def. på summa)}$$
$$= b + (e + a) \qquad \text{(nyss bevisadt)}$$
$$= (b + e) + a \qquad \text{(associationslagen)}$$

Teoremet gäller för ett a hvilket som hälst och för $b = e$. Det gäller således också nu för ett a hvilket som hälst och ett b hvilket som hälst. H. s. b.

5. Genom kombination af associations- och commutationslagarna erhåller man nu utan svårighet, dels:

»Om vissa gifna tal skola summeras, är det likgiltigt, i hvilken ordning summationen företages. Slutresultatet blir alltid ett och samma tal;«

dels äfven:

»Om vissa gifna tal skola summeras, kan man godtyckligt indela talen i grupper; då gruppen innehåller flera tal än ett, bilda summan af talen i hvarje grupp, samt sedan summera alla de så erhållna talen. Man erhåller alltid till slutresultat samma tal.«

6. Sedan vi utredt begreppet summa, blir det lätt fastställa begreppet s k i l l n a d mellan tvänne tal. Man härleder nämligen lätt satsen: »Om tvänne olika tal äro gifna, så finnes alltid ett entydigt gifvet tredje tal i samma talsystem (= skillnaden mellan det efterföljande och det

föregående af de gifna talen) sådant, att summan af det föregående af de gifna talen och det tredje talet är lika med det efterföljande af de båda talen« eller algebraiskt uttryckt, »likheten

$$a + x = b,$$

där a och b äro de båda gifna talen och a föregår b, har alltid till lösning ett entydigt gifvet tal x (= skillnaden mellan b och a)«.

Vi anteckna följande satser, hvilka härur omedelbart härflyta.

»Om a, b, c äro tre gifna tal i samma talsystem och $a + b = c$, så är $a < c$ och $b < c$.«

»Om a, b, c, d äro tal i samma talsystem och $a = b$, $c = d$, så är $a + c = b + d$.«

»Om $a > b$ och $c > d$, så är $a + c > b + d$.«

»Om $a = b$ och $c > d$, så är $a + c > b + d$.«

samt omvändt:

»Om $a = b$ och $a + c > b + d$, så är $c > d$.«

»Om $a = b$ och $a + c = b + d$, så är $c = d$.«

»Om $a > b$ och $a + c = b + d$, så är $c < d$.«

7. Vi öfvergå nu till en utredning af begreppet produkt af tal. Vi definiera på följande sätt produkten af ett tal och ett absolut tal: »Med produkten af ett tal a och ett absolut tal n förstås, då n är större än ett, summan af n tal a och, då n är lika med ett, talet a självt. Denna produkt tecknas $a \cdot n$.«

Om således e är enheten i talsystemet och n är det antal gånger enheten upprepats vid talets bildande, kommer talet att tecknas $e \cdot n$. Är enheten ett, blir således talet $1 \cdot n$ och, emedan detsamma äfven tecknats n, erhålles likheten

$$1 \cdot n = n.$$

Man inser nu utan vidare förklaring betydelsen af uttrycket:

$$(((a \cdot m_1) \cdot m_2) \cdot m_3) \ldots m_n,$$

där m_1, m_2, $m_3 \ldots m_n$ äro absoluta tal. Det genom detsamma framställda talet skrifves enklare

$$a \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots m_n.$$

Man inser likaså betydelsen af uttrycket

$$a \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots m_n \cdot (l_1 \cdot l_2 \ldots l_p),$$

där l_1, l_2, $\ldots l_p$, liksom förut m_1, $m_2 \ldots m_n$ äro absoluta tal.

Man ser vidare, att om a_1, $a_2 \ldots a_n$ äro tal inom samma talsystem och m_1, $m_2 \ldots m_p$ äro absoluta tal, så är:

$$\begin{gathered}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,(m_1 + m_2 + \ldots + m_p) = \\ a_1 \cdot m_1 + a_2 m_1 + \ldots + a_n \cdot m_1 + \\ a_1 \cdot m_2 + a_2 \cdot m_2 + \ldots + a_n \cdot m_2 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 \cdot m_p + a_2 \cdot m_p + \ldots + a_n \cdot m_p.\end{gathered}$$

8. Vidare ser man, att associations- och commutationslagarna äfven gälla för produkten af tal. De komma härvid att lyda:

»Låt a vara ett gifvet tal, och m och n tvänne gifna absoluta tal. Produkten af talet $a \cdot m$ samt talet n är lika med produkten af talet a och produkten af talen m och n, eller

$$(a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n).«$$

Detta är associationslagen och ur densamma härflyter:

$$»a \cdot m_1 \cdot m_2 \ldots m_p = a \cdot (m_1 \cdot m_2 \ldots m_p),$$

om med m_1, $m_2 \ldots m_p$ förstås absoluta tal.«

Commutationslagen blir åter:

»Låt oss med m och n förstå absoluta tal. Produkten af m och n är lika med produkten af n och m, eller

$$m \cdot n = n \cdot m.«$$

Ur commutationslagen följer den allmännare satsen: »Om vissa bestämdt angifna absoluta tal skola multipliceras med hvarandra, är det likgiltigt i hvilken ordning multiplikationen företages. Slutprodukten blir alltid samma tal. Man erhåller också samma tal till slutprodukt, om man huru som hälst indelar de gifna talen i grupper, bildar produkten af talen i hvarje grupp, som innehåller mer än ett tal, samt härefter multiplicerar med hvarandra dessa produkter och, om dylika finnas, de tal, som äro ensamma i sin grupp.«

9. Vi anteckna äfven följande satser, hvilka motsvara de satser, som vi i § 6 sammanställt för summor af tal. De erhållas utan svårighet ur det föregående.

»Låt m, n, l vara tränne absoluta tal och antag, att $m \cdot n = l$. Om hvardera af de tre talen är större än ett, är $m < l$ och $n < l$. Om ettdera af talen m och n är ett, är det andra af dem lika med l, och om talet l är ett, äro båda talen m och n lika med ett.«

Låt oss nu med a och b förstå två tal i samma talsystem samt med m och n tvänne absoluta tal. Då gälla satserna:

»Om $a = b$ och $m = n$, så är $a \cdot m = b \cdot n$.«

»Om $a > b$ och $m > n$, så är $a \cdot m > b \cdot n$.«

»Om $a = b$ och $m > n$, så är $a \cdot m > b \cdot n$.«

samt omvändt satserna:

»Om $a = b$ och $a \cdot m > b \cdot n$, så är $m > n$.»

»Om $a = b$ och $a \cdot m = b \cdot n$, så är $m = n$.«

»Om $a > b$ och $a \cdot m = b \cdot n$, så är $m < n$.«

10. Uttrycken, att ett tal är en mångfald af ett annat tal eller en divisor till ett tal, bestämmas på följande sätt.

»Om med a förstås ett gifvet tal och med n ett gifvet absolut tal samt med b betecknas talet $a \cdot n$ ($b = a \cdot n$), så säges talet b vara den n'te mångfalden af talet a, och talet a sägas vara en divisor till b.«

Med begagnande af denna terminologi kan man uttala de båda satserna:

»Enheten är en gemensam divisor för alla tal i talsystemet.«

»Hvarje tal har sig självt till divisor.«

samt omedelbart härleda satsen:

»Om $a = b + c$ och d är divisor till två af talen a, b, c, så är d divisor äfven till det tredje talet.«

11. Låt oss nu antaga, att a och b äro tvänne med hvarandra olika tal, af hvilka det ena icke är divisor till det andra. I sjunde boken af Euklides Elementa läres, huru man skall finna en divisor till såväl a som b, hvilken själf som divisor innehåller hvarje tal, som är divisor till både a och b. Från detta Euklides förfarande stamma en hel rad af den högre aritmetikens och algebrans viktigaste satser. Detta förfarande är i hufvudsak följande.

Låt oss med a förstå det föregående och med b det efterföljande talet. Om man bildar de på hvarandra följande mångfalderna $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, $a \cdot 3$ ... träffar man nödvändigt en första mångfald af a, som är ett tal, hvilket följer efter b och som således närmast föregås af en mångfald af a, låt vara $a \cdot \beta$, hvilken föregår b. Det finnes då nödvändigt (§ 6) ett och endast ett tal c, hvilket är sådant att

$$b = a \cdot \beta + c.$$

Detta tal c föregår talet a. Om man nu å c och a upprepar samma förfarande som förut å a och b, erhåller man:

$$a = c \cdot \gamma + d,$$

där γ är ett absolut tal i samma system som a, b, c, hvilket föregår c.

Upprepar man ytterligare detta förfarande, erhåller man en följd af likheter:

$$\begin{aligned} b &= a \cdot \beta + c \\ a &= c \cdot \gamma + d \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s &= t \cdot \tau + u, \end{aligned}$$

där a föregår b, c föregår a, d föregår c och u föregår t. Man framkommer slutligen till en sista likhet

$$t = u \cdot \eta,$$

hvilken uttrycker, att det sista talet u är en divisor till det näst sista talet t.

Emedan (§ 10) hvarje divisor till a och b äfven är en divisor till c och härmed till $d \ldots s$, t, u samt dessutom u är en divisor till t, $s \ldots d$, c, b, a, ha vi uti u erhållit ett tal, hvilket, självt divisor till såväl a som b, som divisor innehåller hvarje annan gemensam divisor till a och b. Det kan ej heller finnas något annat tal med denna egenskap, ty ett tal, som föregår u, kan icke ha u till divisor, och u kan icke heller som divisor ha ett tal, hvilket efterföljer u.

Vi kunna således uttala följande sats, som är andra propositionen i sjunde boken af Euklides Elementa.

»Om a och b äro tvänne med hvarandra olika tal i samma talsystem, så finnes alltid en gemensam divisor till båda talen, hvilken själf som divisor innehåller hvarje divisor till de båda talen. Det finnes icke mer än ett tal, som har denna egenskap, och detsamma erhålles genom Euklides förfarande.«

12. Om a och b äro absoluta tal, är u den största gemensamma divisorn till a och b, och Euklides' förfarande har således gifvit oss medel att finna denna största gemensamma divisor.

»Om denna största gemensamma divisor är ett, sägas de båda talen vara relativa primtal till hvarandra.«

Man är nu i stånd att utan vidare härleda följande båda satser.

»Om a och b äro relativa primtal till hvarandra, så är det minsta tal, hvilket är en mångfald såväl af talet a som af talet b talet $a \cdot b$.«

»Om d är den största gemensamma divisorn till tvänne tal, $a = d \cdot a'$ och $b = d \cdot b'$, så är det minsta tal, hvilket är en mångfald såväl af talet a som af talet b, talet $d \cdot a' \cdot b'$.«

Detta tal $d \cdot a' \cdot b'$ benämnes den minsta gemensamma dividenden till talen a och b.

13. Om vi nu fortsatte studiet af de hela talens addition och multiplikation, skulle vi komma till talteorien, en teori som har sin källa redan i Euklides förfarande och som sedan genom Diophantus, genom Fermat och Euler, Gauss, Lejeune Dirichlet och Riemann samt deras efterföljare, nu senast genom Minkowski, vunnit en sådan betydenhet, att ett yttrande, hvilket tillskrifves Gauss, att talteorien vore »die Königin der Mathematik« på samma sätt som matematiken vore »die Königin der Wissenschaften«, väl kan vara värdt att begrunda.

Man hade då att utgå från primtalen, »där med primtal förstås ett absolut tal, som icke har andra divisorer än talet själft samt ett«, och att härefter börja med att bevisa den grundläggande satsen, att »hvarje tal är en produkt af primtal« samt att »när två primtalsprodukter framställa samma tal, hvarje primtalsfaktor i den ena produkten förekommer lika ofta i den andra.«

KAPITEL II

Det brutna talet.

1. Om med a förstås ett gifvet tal, kan man, som vi sett, alltid bilda ett nytt tal b, hvilket utgör en viss bestämd mångfald af a. Om åter b är ett gifvet tal, finnes icke nödvändigt ett motsvarigt tal sådant, att en viss mångfald af detsamma är lika med b. Likheten $x \cdot n = b$, där x är ett tal i samma talsystem som b och n är ett absolut tal, kan icke uppfyllas för hvilka värden som hälst på n och b.

För att kunna upprätthålla en sådan sats, att denna likhet vid hvilka tal som hälst n och b alltid har en lösning, blir det nödvändigt ålägga enheten den bestämning, att densamma är delbar, och vidga vårt talsystem därhän, att detsamma kommer att innehålla äfven tal, som äro bildade af delar af enheten.

Vi ha hittils icke pålagt enheten e någon bestämning utöfver den att vara det ting, som vid talets bildande fasthålles i föreställningen. Vi ålägga nu enheten härutöfver egenskapen, »att, huru vi än fixera ett absolut tal n, städse vara den n'te mångfalden af en annan i och med n entydigt gifven enhet. Denna sista enhet benämnes den n:te bråkdelen af den ursprungliga enheten och tecknas, då med e förstås den ursprungliga enheten, $\frac{e}{n}$.«

Vi uttrycka detta äfven så, »att vi om enheten e förutsätta, att densamma städse och vid hvarje val af det absoluta talet n är delbar och endast på ett sätt delbar i n med hvarandra equivalenta delar.«

Vid hvarje likhet eller olikhet, där den ursprungliga enheten e uppträder, skall man således kunna ersätta densamma med en n:te mångfald (det absoluta talet må vara hvilket som hälst) af enhetens n:te bråkdel $\left(e = \frac{e}{n} \cdot n\right)$ och öfver allt, där den n:te mångfalden af den n:te bråkdelen af den ursprungliga enheten förekommer, skall denna n:te mångfald kunna ersättas af den ursprungliga enheten $\left(\frac{e}{n} \cdot n = e\right)$.

2. Det är lätt att se, att hvarje bråkdel af enheten åter själf är delbar i ett huru stort antal delar som hälst. För att inse detta erfordras endast att ådagalägga, att huru man än må välja de absoluta talen m och n, finnes alltid en bråkdel af enheten e, hvars m:te mångfald är lika med $\frac{e}{n}$. Om bråkdelen $\frac{e}{n \cdot m}$ gäller $\frac{e}{n \cdot m} \cdot n \cdot m = e$ och om bråkdelen $\frac{e}{n}$, att $e = \frac{e}{n} \cdot n$. Emedan nu $\frac{e}{n \cdot m} \cdot n \cdot m = \frac{e}{n \cdot m} \cdot m \cdot n$ (Kap. I, § 10), så äro såväl den n:te mångfalden af $\frac{e}{n \cdot m} \cdot m$ som af $\frac{e}{n}$ lika med e. Då vi nu förutsatt, att den n:te bråkdelen af e eller den enhet, hvars n:te mångfald är e, är entydigt gifven, så är således $\frac{e}{n \cdot m} \cdot m = \frac{e}{n}$ och $\frac{e}{n \cdot m}$ är i följd häraf den m:te bråkdelen af $\frac{e}{n}$

$$\left(\frac{\frac{e}{n}}{m} = \frac{e}{n \cdot m}\right).$$

Då nu $\frac{e}{n \cdot m} = \frac{e}{m \cdot n}$ erhåller man således äfven satsen

$$»\frac{\frac{e}{n}}{m} = \frac{\frac{e}{m}}{n}«.$$

»Vi beteckna hädanefter vid det talsystem, hvars enhet är e denna enhet som systemets grundenhet och anse talsystemet omfatta såväl alla tal, bildade af enheten e som äfven alla tal $\frac{e}{n} \cdot m$, bildade af en bråkdel af enheten e, hvilka icke samtidigt äro en multipel af denna enhet. De förra talen betecknas då som hela tal och de senare som brutna tal.«

Vid enheten ett, som förut icke hade någon annan egenskap än att vara det, som vid talets bildande fasthölls i föreställningen, fästes således numera ytterligare den egenskap, att »densamma är delbar« och »vårt absoluta talsystem kommer därföre att hädanefter omfatta såväl hela som brutna tal.«

Man har vidare

$$»1 = \frac{1}{n} \cdot n \text{ och } \frac{1}{n} \cdot n = 1.«$$

Vi anteckna ytterligare

$$»\frac{e}{1} = e \text{ och } \frac{1}{1} = 1.«$$

»Talet $\frac{e}{n} \cdot m$ tecknas äfven $\frac{e \cdot m}{n}$ eller, då $e \cdot m = b$, likaväl $\frac{b}{n}$.«

»Detta tal $\frac{e}{n} \cdot m$ är den n:te bråkdelen af talet b«, ty

$$\frac{b}{n} \cdot n = \frac{e \cdot m}{n} \cdot n = \frac{e}{n} \cdot m \cdot n = e \cdot m.$$

»Likheten $x \cdot n = b = e \cdot m$, som utgjorde vår utgångspunkt är således alltid lösbar och lösningen är

$$x = \frac{b}{n} = \frac{e \cdot m}{n} = \frac{e}{n} \cdot m.«$$

»Talet $\frac{b}{n} = \frac{e \cdot m}{n}$ benämnes bråk och säges härvid $b = e \cdot m$ vara bråkets täljare samt det absoluta hela talet n dess nämnare.« »När man talar om bråk, utan att angifva, att man befinner sig inom ett talsystem med grundenheten e, betyder detta, att $e = 1$ eller att man har ett tal inom det absoluta talsystemet.«

3. Emedan $a = b$ icke längre betyder, att a är identiskt samma tal som b, utan tvärtom a kan uppträda under formen $\frac{e \cdot m \cdot p}{n \cdot p}$ och b under formen $\frac{e \cdot m \cdot q}{n \cdot q}$, hvarvid $p \neq q$, blir det, för att kunna med hvarandra jämföra tvänne tal, nödvändigt att först bringa dem under enhetlig form. Detta sker så, att man först reducerar hvardera talet till sådan form, att de absoluta hela talen i täljare och nämnare blifva relativa primtal. Om sedan detta skett, det ena talet befinnas vara bildadt af μ:te delen och det andra af ν:te delen af enheten, uppsöker man den minsta gemensamma dividenden γ till μ och ν och reducerar sedan hvardera talet till att blifva en mångfald af $\frac{e}{\gamma}$. Härigenom blir det möjligt att afgöra om talen äro lika eller olika hvarandra, hvilket tal, som bör anses vara det föregående och hvilket det efterföljande, samt i det fall, att $e = 1$, hvilket tal, som vid olikhet mellan tvänne tal är det större och hvilket som är det mindre.

Vi erhålla härigenom:

»Om a, b, c tillhöra samma talsystem och $a = b$ samt $b = c$, så är $a = c$.

Om $a > b$ samt $b > c$, så är $a > c$.

Om $a > b$ och $b = c$, så är $a > c$.

Om $a = b$ och $b > c$, så är $a > c$.

4. Närmast kommer nu att definiera summa af tvänne tal i vårt utvidgade talsystem. Uppenbarligen bör denna definition komma att lyda:

»Med summan af a och b förstås det tal, som erhålles om båda talen uttryckas som mångfalder af samma bråkdel af talsystemets enhet, samt härefter summeras som tal, hvilka ha denna bråkdel till enhet.«

Man ser lätt, att »den på detta sätt definierade summan $a + b$ blir entydigt bestämd eller oberoende af, i hvilken bråkdel af enheten, man må ha uppmätt de båda talen a och b.«

Man ser vidare, att associations- och commutationslagarna (Kap. I, § 4) fortfarande gälla:

$$»a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a + b = b + a,«$$

och att likaså fortfarande våra satser Kap. I, § 5 och § 6 kunna oförändrade upprätthållas.

5. Vi ha förut funnit (Kap. I, § 7), att om $a_1, a_2 \ldots a_n$ äro tal inom samma talsystem och $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ äro absoluta hela tal, så är:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p) = \\ a_1\cdot\alpha_1 + a_2\cdot\alpha_1 + \ldots + a_n\cdot\alpha_1 + \\ a_1\cdot\alpha_2 + a_2\cdot\alpha_2 + \ldots + a_n\cdot\alpha_2 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\cdot\alpha_p + a_2\cdot\alpha_p + \ldots + a_n\cdot\alpha_p\end{aligned}$$

För att kunna upprätthålla denna sats äfven för det fall, att talen a och α äro bråk, blir det nödvändigt att definiera, hvad som bör förstås med $\frac{e\cdot m}{n}\cdot\frac{p}{q}$, där m, n, p och q äro absoluta tal. Vi ha:

$$\frac{e\cdot m}{n}\cdot\frac{p}{q} = \left(\frac{e}{n} + \ldots + \frac{e}{n}\right)\left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}\right),$$

hvarest $\frac{e}{n}$ förekommer m gånger inom första klammern samt $\frac{1}{q}$ förekommer p gånger inom andra klammern.

Skall vår sats kunna upprätthållas, bör således:

$$\left(\frac{e}{n} + \ldots \frac{e}{n}\right)\left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}\right) = \begin{array}{l} \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} + \ldots + \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} + \\ \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} + \ldots + \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} + \ldots + \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} \end{array}$$

där $\frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q}$ i hvarje horizontal rad förekommer m gånger och i hvarje vertikal rad p gånger samt $\frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q}$ bör vara ett tal inom det system, hvars grundenhet är e och som det återstår att definiera.

Om $\frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q}$ tillhör detta talsystem, är

$$\left(\frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q}\right)\cdot q\cdot n = \begin{array}{l} \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} + \ldots + \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} + \\ \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} + \ldots + \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} + \ldots + \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q}, \end{array}$$

hvarest $\frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q}$ i hvarje horizontal rad förekommer q gånger och horizontalradernas antal är n.

Nu är:

$$\frac{e}{n}\cdot\frac{p}{q} = \frac{e}{n}\left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}\right)$$

där $\frac{1}{q}$ inom klammern förekommer p gånger, och således äfven:

$$\frac{e}{n}\cdot\frac{q}{q} = \frac{e}{n}\left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}\right),$$

där $\frac{1}{q}$ förekommer inom klammern q gånger. Således är:

$$\left(\frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q}\right)\cdot q\cdot n = \frac{e}{n}\cdot\frac{q}{q} + \ldots + \frac{e}{n}\cdot\frac{q}{q} = \frac{e}{n}\cdot 1 + \ldots + \frac{e}{n}\cdot 1,$$

där hvarje term på högra sidan om likhetstecknet förekommer n gånger.

Vi ha således blifvit ledda därtill, att för att vår sats Kap. I, § 9 skall kunna upprätthållas, utan att man lämnar det talsystem, hvars grundenhet är e, erfordras definitionen:

$$»\frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q} = \frac{e}{q\cdot n}«$$

eller, då $e = 1$,

$$»\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q} = \frac{1}{n\cdot q}«.$$

Med denna definition till utgångspunkt erhåller man satsen i fråga och kan således också skrifva:

$$»\frac{e\cdot m}{n}\cdot\frac{p}{q} = \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{q}\cdot m\cdot p = \frac{e}{nq}\cdot m\cdot p = \frac{e\cdot m\cdot p}{n\cdot q}«.$$

Man inser äfven utan vidare, att satserna Kap. I, § 8 och 9 kunna oförändrade upprätthållas.

6. Vi ha sett, att teorien för de brutna talen har sin källa i sträfvan att upprätthålla lösbarheten af likheten

$$x\cdot\alpha = a = e\cdot m$$

äfven i det fall, då det absoluta talet α icke är en divisor till det absoluta talet m.

Denna sträfvan, hvars yttre anledning är våra sinnens uppfattning om vissa yttre tings delbarhet, går tillbaka till mänsklighetens tidigaste barndom, men har relativt sent blifvit uttryckt under den abstrakta form, i hvilken vi klädt densamma. Denna form är emellertid det begreppsliga och adeqvata uttrycket för hvad man mer eller mindre medvetet eftersträfvat.

En af matematikens, den matematiska analysens, främsta uppgifter är äfven att bringa till full klarhet den mer och mer omfattande kunskap om tingen och deras förhållanden, som människorna småningom förvärfva. Det har alltid varit så, huru långt vi än gå tillbaka i tänkandets historia, det är så äfven i våra dagar, när det gäller att begreppsligt fatta och ordna det brokiga och omfattande nya kunskapsmaterial, som naturvetenskaperna alltjämt insamla, och det skall också alltid så förblifva, så länge vår sinnesvärld och vårt tänkande stå i förhållande till hvarandra.

7. Låt oss med a och b $(a < b)$ förstå tvänne tal i vårt utvidgade talsystem (§ 2), hvilka må vara hvarandra huru närbelägna som hälst. Huru stort man än må välja det absoluta talet m, finnas alltid m med hvarandra olika tal, hvilka efterfölja a, men föregå b. Vid första påseende förefaller det därföre, som hade oändlighetsbegreppet (Kap. I, § 1) genom införande af de brutna talen blifvit i mycket väsentlig mån utvidgadt. Att så emellertid icke är förhållandet, inses på följande sätt.

Samtliga absoluta tal kunna uttryckas under formen $\frac{\lambda}{\mu}$. Låt oss indela dessa tal i grupper, så att till första gruppen höra alla tal, för hvilka $\lambda + \mu = 2$ (således endast talet 1), till andra gruppen alla tal, för hvilka $\lambda + \mu = 3$ (således 2, 1/2) till tredje gruppen alla tal, för hvilka $\lambda + \mu = 4$ och hvilka icke förekomma i en af de föregående grupperna (således 3, 1/3) etc., till m:te gruppen alla tal, för hvilka $\lambda + \mu = m + 1$ och hvilka icke förekomma i någon föregående grupp etc. Man inser, att man genom att fortsätta på detta sätt erhåller hela talvärlden. I första gruppen finns endast ett tal, i andra två tal, i tredje också två tal i m:te p tal etc. Låt oss nu till talen $1, 2, 3, \ldots n \ldots$ tillordna, till talet 1 talet 1, till de två talen 2, 3 ett af hvardera af de båda talen i andra gruppen, till talen 4, 5 ett af hvardera af de båda talen i tredje gruppen samt fortskrida på samma sätt, så att de p talen i m:te gruppen hvart och ett af dem tillordnas ett af talen $p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} + 1$, $p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} + 2, \dots$ $p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} + p_m$. Man erhåller på detta sätt hela vår talvärld entydigt tillordnad talserien $1, 2, 3 \dots n \dots$

Vi ha vid detta sätt att gå tillväga för första gången användt tankens förmåga att på en gång i medvetandet fasthålla tvänne föremål, hvilka äro till hvarandra tillordnade.

Utan denna tankens förmåga funnes icke någon matematisk vetenskap.

Vi ha på detta sätt erhållit: Oändlighetsbegreppet har icke blifvit vidgadt genom införande af de brutna talen.

KAPITEL III

Grupper af ett obegränsadt antal utaf tal. Det almänna, absoluta talet.

1. Vi ha sett, huru samtliga hela och brutna tal kunna entydigt tillordnas den obegränsade följden $\mu = 1, 2, 3 \dots$ af hela tal på ett sådant sätt, att mot hvarje helt tal μ svarar ett och endast ett helt eller brutet tal a_μ samt, vice versa, mot hvarje helt eller brutet tal a_μ ett och endast ett helt tal μ.

Låt oss nu från talen a_μ tänka oss utbrutna vissa gifna tal. Sammanfattningen af dessa tal benämna vi en grupp och teckna densamma (a). Vi benämna vidare hvarje enstaka tal a, som tillhör gruppen, ett element i densamma. Det kan nu inträffa, att huru stort antal element jag frånskiljer gruppen (a), andra element kvartstå. I så fall säges gruppen vara sammanfattningen af ett obegränsadt antal element.

En sådan grupp (a), som utgör sammanfattningen af ett obegränsadt antal element, vore en grupp, hvars element äro samtliga hela och brutna tal. En annan vore sammanfattningen af alla brutna tal mellan två på hvarandra följande hela tal. Ännu en annan vore sammanfattningen af alla tal $\frac{1}{2^\nu}$, där ν antager alla heltalsvärden eller af $\frac{1}{p^\nu}$, där p betyder samtliga primtal och ν alla hela tal.

Vi förenkla att börja med vår undersökning genom förutsättningen, att alla tal i gruppen äro absoluta tal. Senare skola vi behandla allmännare grupper, där detta ej längre är fallet.

Vi börja med att fastställa som grundläggande förutsättning för de grupper, hvilka af oss i det följande skola behandlas: Det finnes alltid vid hvarje grupp ett tal, som är större än summan af ett huru stort antal som hälst af element i gruppen.

Vi teckna en sådan grupp $((a))$. Ingen sådan i förväg bestämd tillordning af elementen a till hvart och ett af talen $\nu = 1, 2, 3 \ldots$, som exempelvis uppkommer, om man uppfattar talen a som tal a_{μ_ν} enligt någon bestämd lag utbrutna ur talföljden a_μ, förutsättes härvid som gifven. Ingendera af de båda grupperna, sammanfattningen af alla hela och brutna tal eller af alla brutna tal mellan två hela tal, uppfyller vår grundläggande förutsättning. Man kan nämligen alltid bilda en summa af element i en sådan grupp, som är större än hvilket som hälst uppgifvet tal. Ingendera af dessa båda grupper är således en grupp $((a))$.

Detta är däremot fallet med gruppen $\frac{1}{2^\nu}$; $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ Man har nämligen, n må vara ett helt tal huru stort som hälst:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^\nu} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.^{1}$$

Det må ej vara uteslutet, att vissa element i gruppen $((a))$ äro lika med ett och samma tal. Detta kan dock i följd af vår grundläggande förutsättning endast inträffa för ett begränsadt antal element och för hvarje element endast ett begränsadt antal gånger.

Med den grundläggande förutsättning, hvilken vi beträffande grupperna $((a))$ infört, skall det visa sig, att vi i teorien för dessa grupper stå på lika fast mark, som vid studiet af det hela och det brutna talet. Det skall visa sig, att sådana grupper kunna behandlas som tal samt lyda samma räknelagar som de hela och brutna talen. Det skall vidare komma att framgå, att desammas införande innebär ett väsentligt vidgande af talbegreppet, hvarigenom erhålles såväl den begreppsliga tolkningen af ett problem, som under årtusenden gäckat tidernas största tänkare, eller att kvadratens sida och diagonal samt cirkelns periferi och diameter icke kunna mätas med gemensamt mått, som äfven att vägen samtidigt öppnas utöfver det ändligas matematik till infinitesimalkalkylen med alla dess afgreningar, de må benämnas högre matematisk analys, differential- och integralkalkyl, allmän funktionsteori eller teori för analytiska funktioner eller annat.

[1] För enkelhets skull anticipera vi, då härå icke ligger någon särskild vikt, kännedom om betydelsen af tecknet $\sum$.

2. Det första, hvilket beträffande våra grupper behöfver fastställas, är begreppen likhet och olikhet samt större och mindre i afseende på tvänne grupper $((a))$ och $((b))$. Likhet mellan tvänne tal ägde endast rum, när de båda talen genom ett ändligt antal operationer kunde öfverföras uti samma tal. Ett sådant likhetsbegrepp kan icke längre beträffande våra grupper upprätthållas. Begreppet likhet och härmed äfven begreppen större och mindre måste ges en vidare bestämning.

Vi begagna oss af en terminologi af Weierstrass. Ett tal säges innehållas i gruppen $((a))$, om man från gruppen kan frånskilja ett antal element, hvilkas summa är större än talet i fråga. Vi kunna med denna terminologi på följande sätt uttala vår grundläggande förutsättning: En grupp, hvilken icke innehåller samtliga hela tal, är en grupp $((a))$.

Begreppen likhet, större och mindre definiera vi nu på följande sätt: »Gruppen $((a))$ är lika med gruppen $((b))$, $((a)) = ((b))$, $((b)) = ((a))$, om hvarje tal, som innehålles i $((a))$, äfven innehålles i $((b))$ och vice versa.« »Däremot är den ena gruppen $((a))$ mindre än den andra $((b))$, som är större, $((a)) < ((b))$, $((b)) > ((a))$, om det finnes ett tal, hvilket innehålles i $((b))$ utan att innehållas i $((a))$.« Att gruppen $((a))$ är olika gruppen $((b))$, $((a)) \neq ((b))$, betyder då, att likhet mellan de båda grupperna icke äger rum, att de ej äro lika hvarandra.«

Ett exempel på likhet mellan tvänne olika sammansatta grupper erhålles genom jämförelse mellan gruppen $\left(\left(\frac{1}{2^\nu}\right)\right)$; $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ samt den grupp, som består af det enda talet 1. Man har, som vi sett, n må väljas huru stort som hälst,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^\nu} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Häraf följer, att gruppen $\left(\left(\frac{1}{2^\nu}\right)\right)$ alltid och endast innehåller hvarje egentligt bråk. Då det samma gäller om talet 1, är således

$$\left(\left(\frac{1}{2^\nu}\right)\right) = 1.$$

3. Ur definitionen på *likhet* mellan tvänne grupper följer omedelbart:

»Om gruppen endast innehåller ett begränsadt eller ändligt antal element, så är densamma lika med summan af dessa element«

samt vidare:

»Om $((a)) = ((b))$ och $((b)) = ((c))$, så är $((a)) = ((c))$«.

»Om $((a)) > ((b))$ och $((b)) \geq ((c))$, så är $((a)) > ((c))$«.

»Om $((a)) \geqq ((b))$ och $((b)) > ((c))$, så är $((a)) > ((c))$».

4. En enkel öfverläggning visar ytterligare:

»Om δ är ett tal, hvilket innehålles i gruppen $((a))$, så finnes alltid ett motsvarigt helt tal n sådant, att $n \cdot \delta < ((a)) \leq (n+1)\,\delta$.« Det finnes nämligen alltid ett så stort helt tal m, att $m \cdot \delta$ är större än hvarje uppgifvet tal. Ökar man tillräckligt m, träffar man därför slutligen på ett tal N $(N \geq m)$ så stort, att $N \cdot \delta$ icke innehålles i $((a))$. Minska nu N med en enhet åt gången. Man träffar då nödvändigt på ett sista helt tal $n+1$ sådant, att $(n+1)\cdot\delta$ icke innehålles i $((a))$, medan detta däremot är fallet med $n \cdot \delta$. Q. e. d.

Häraf följer åter:

»Från gruppen $((a))$ kan, då densamma innehåller ett obegränsadt antal element, alltid frånskiljas så många (= ett så stort antal) element, att den grupp, som härefter återstår, är mindre än hvilket uppgifvet tal som hälst.«

Låt nämligen δ vara ett godtyckligt litet tal, hvilket innehålles i $((a))$. Vi ha bevisat tillvaron af ett helt tal n sådant, att

$$n \cdot \delta < ((a)) \leq (n+1) \cdot \delta.$$

Således kan man alltid finna ett så stort helt tal m, att

$$n\delta < \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu$$

där $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ må betyda olika element i gruppen $((a))$, och således äfven ett tal $\delta_1 > \delta$ sådant, att

$$n\delta < n\delta_1 < \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu.$$

Häraf följer åter

$$n\delta_1 + \sum_{\nu=m+1}^{m+p} a_\nu < \sum_{\nu=1}^{m+p} a_\nu$$

där $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_{m+p}$ äro nya element ur gruppen $((a))$. Då nu $((a)) \leq (n+1)\delta$, är

$$\sum_{\nu=1}^{m+p} a_\nu < (n+1)\delta = n\delta + \delta = n\delta_1 + \delta_2,$$

där δ_2 är ett tal mindre än δ.

Således är

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+p} a_\nu < \delta_2 < \delta,$$

och detta huru stort talet p än må väljas. Således

$$((a))^{(m+1)} \leq \delta_2 < \delta,$$

då med $((a))^{(m+1)}$ förstås sammanfattningen af alla element i en grupp, hvilka kvartstå, sedan m gifna element a_1, a_2, $\ldots a_m$ blifvit frånskilda. Q. e. d.

Omvändt gäller äfven:

»Låt (a) vara en grupp af tal i allmännaste mening (cf. § 1), δ ett godtyckligt litet tal samt låt oss från (a) utbryta vissa element a_1, $a_2 \ldots a_m$. Kan det hela talet m väljas så stort, att den grupp, som återstår, icke innehåller δ, så är (a) en grupp $((a))$.«

Om nämligen $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_{m+p}$ äro element i den grupp, som återstår efter frånskiljandet af elementen $a_1 \ldots a_m$, så är

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+p} a_\nu^\varepsilon < \delta,$$

huru stort jag än må ha valt talet p. Således är äfven, oberoende af talet p,

$$\sum_{\nu=1}^{m+p} \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{m+p} \alpha_\nu < \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu + \delta$$

och följaktligen gruppen (a) en grupp $((a))$. Q. e. d.

5. Ett enkelt exempel skall visa oss, att vi i våra grupper $((a))$ erhållit något annat och mera än de tal, vi förut känna. Vi välja den grupp $\left(1, \frac{1}{\underline{|\nu}}\right)$, som utgör sammanfattningen af talen $1, \frac{1}{\underline{|\nu}}$; $(\underline{|\nu} = 1\ 2\ 3 \ldots \nu)$; $\nu = 1, 2, 3 \ldots$, hvilken representerar basen e i det naturliga logaritmsystemet, en af den matematiska analysens tidigast kända och mest beaktade af sådana grupper $((a))$, som ej äro lika med något vare sig helt eller brutet tal.

Man har

$$\sum_{\nu=p}^{p+q}\frac{1}{\underline{|\nu}}=\frac{1}{\underline{|p}}\left(1+\frac{1}{p+1}\cdots+\frac{1}{(p+1)\ldots(p+q)}\right)$$

$$=\frac{1}{\underline{|p}}+\frac{1}{\underline{|p+1}}\left(1+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+2)(p+3)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(p+2)(p+3)\ldots(p+q)}\right)<\frac{1}{\underline{|p}}+\frac{1}{\underline{|p+1}}$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(p+2)^{q-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{\underline{|p}}+\frac{1}{\underline{|p+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{(p+2)^q}}{1-\frac{1}{p+2}}<\frac{1}{\underline{|p}}+\frac{1}{\underline{|p}}\cdot\frac{p+2}{(p+1)^2}$$

$$=\frac{1}{\underline{|p}}+\frac{1}{\underline{|p}}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}\right).$$

Om således q är ett helt tal, huru stort som hälst, är

$$\sum_{\nu=1}^{1+q}\frac{1}{\underline{|\nu}}<1+\tfrac{3}{4},$$

hvaraf åter följer

$$2<1+\sum_{\nu=1}^{1+q}\frac{1}{\underline{|\nu}}<2+\tfrac{3}{4}$$

samt att gruppen $\left(1,\frac{1}{\underline{|\nu}}\right)$ är en grupp $((a))$ eller $\left(\left(1,\frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right)$, hvilken har egenskapen

$$2<\left(\left(1,\frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right)\leq 2+\tfrac{3}{4}$$

och således icke kan vara lika med något helt tal.

Gruppen $\left(\left(1,\frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right)$ kan icke heller vara lika med något brutet tal, låt vara $\frac{p_1}{p}$ $(p>1)$. Vi ha i föregående § visat, att om δ är ett tal, huru litet som hälst, kan man alltid fastställa ett annat tal $\delta_1 < \delta$ samt ett helt tal n, det förra δ_1 närbeläget δ och det senare n så stort, att

$$\left(\left(1, \frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right)^{n+1} < \delta_1 < \delta.$$

Häraf följer åter, att summan af ett antal element huru stort som hälst uti gruppen $\left(\left(1, \frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right)$ är mindre än

$$1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}} + \delta_1,$$

och att således

$$\left(\left(1, \frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right) < 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}} + \delta$$

samt att, när

$$\frac{p_1}{p} = \left(\left(1, \frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right)$$

$$\frac{p_1}{p} < 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}} + \delta.$$

Sätta vi nu $n = p + q$, erhålles

$$\frac{p_1}{p} < 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \ldots + \frac{1}{\underline{|p-1}} + \sum_{\nu=p}^{p+q} \frac{1}{\underline{|\nu}} + \delta$$

$$< 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \ldots + \frac{1}{\underline{|p-1}} + \frac{1}{\underline{|p}}\left(1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \delta,$$

hvaraf åter följer

$$p_1 \underline{|p-1} < P + 1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \delta \underline{|p},$$

där P är ett helt tal gifvet i och med talet p samt δ är ett tal huru litet som hälst. Enär P och p $(p > 1)$ äro gifna tal, är således

$$p_1 \underline{|p-1} < P + 1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Å andra sidan innehåller gruppen $\left(\left(1, \frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right)$ talet

$$1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\nu}},$$

och om således $\frac{p_1}{p} = \left(\left(1, \frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right)$, skulle häraf följa

$$\frac{p_1}{p} > 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\nu}} = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \ldots + \frac{1}{\underline{|p-1}}$$

$$+ \sum_{\nu=p}^{p+q} \frac{1}{\underline{|\nu}} > 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \ldots + \frac{1}{\underline{|p-1}} + \frac{1}{\underline{|p}}$$

och således

$$p_1 \underline{|p-1} > P + 1$$

samt

$$P + 1 < p_1 \underline{|p-1} < P + 1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Talen P och $p_1 \underline{|p-1}$ äro hela tal och $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}$ ett egentligt bråk, och ett helt tal skulle härmed vara beläget mellan ett annat helt tal och summan af detta tal och ett egentligt bråk. Då detta icke kan inträffa, och $\left(\left(1, \frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right)$ icke heller är lika med något helt tal, ha vi således i gruppen

$$e = \left(\left(1, \frac{1}{\underline{|\nu}}\right)\right)$$

erhållit en grupp $((a))$, som ej är lika med något vare sig helt eller brutet tal. Q. e. d.

»Begreppet grupp är allmännare än begreppet helt eller brutet tal. Det finnes grupper, som icke äro lika med något helt eller brutet tal.«

6. Denna sats är åter endast ett speciellt fall af en allmännare sats: »Låt $A < B$ vara tvänne tal hvilka som hälst och således äfven hvarandra huru närbelägna som hälst. Det finnes alltid en grupp $((a))$, hvilken icke är lika med något vare sig helt eller brutet tal och hvilken är belägen mellan A och B, $A < ((a)) < B$.«[1]

Denna sats inbegripes i den beviskedja, hvilken Weierstrass infört för härledningen af en annan sats, hvilken åter utgör den ofrånkomliga grunden för hvarje beståndande funktionsteori. Satsen, hvilken först af Weierstrass blifvit skarpt formulerad och samtidigt strängt bevisad, lyder:

»Låt A och B vara tvänne tal eller grupper, af hvilka $A < B$. Antag vidare, att inom intervallet $[A < B]$ finnas angifna ett obegränsadt antal[2] med hvarandra olika tal eller grupper $((a))$. Intervallet $[A < B]$ inbegriper i så fall åtminstone en grupp $((c))$, hvilken är ett gränsställe till grupperna $((a))$.«

»Med gränsställe $((c))$ förstås då en sådan grupp, att om densamma inneslutes mellan tvänne tal, hvilka man närmar hvarandra, huru mycket som hälst, så finnes alltid mellan dem ett obegränsadt antal af de gifna grupperna $((a))$.«

Som exempel må antecknas

[1] Cf. Georg Cantor, »Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen«, § 2, pag. 260. Journal f. d. reine und angew. Math., Bd. 77. — »Ueber uendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten«, pag. 5 seq., Math. Ann., Bd. 15. — »Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels«, § 2, pag. 308 seq, Acta Math., T. 2.

Henri Poincaré, »Ueber transfinite Zahlen«, pag. 45 seq. Sechs Vorträge aus d. reinen Math. u. math. Physik. Fünfter Vortrag.

[2] = flere med hvarandra olika tal eller grupper än hvilket huru stort helt tal som hälst = oändligt många med hvarandra olika tal eller grupper.

$$A = 1,\ B = 2$$
$$((a)) = 1 + \frac{1}{2^n};\ n = 1, 2, 3 \ldots$$
$$((c)) = 1.$$
$$A = 2,\ B = 3$$
$$((a)) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\nu}};\ n = 1, 2, 3 \ldots$$
$$((c)) = \text{gruppen } e \text{ (cf. § 5)}$$

Den Weierstrassiska beviskedjan inbegriper likaledes GEORG CANTORS berömda sats.[1]

Hat man eine einfach unendliche Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$ von reellen, ungleichen Zahlen, die nach irgend einem Gesetzt fortschreiten, so lässt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eine Zahl η (und folglich lassen sich deren unendlich viele) angeben, welche nicht in jener Reihe (als Glied derselben) vorkommt.

§ 7. Vi ha i kapitel II visat, huruledes ett antal gifna tal, hela eller brutna, alltid kunna öfverföras i en enhetlig, för dem alla gemensam form (multipler af samma del af enheten). Det var härigenom en jämförelse mellan sådana tal blef möjlig och frågan om likhet eller olikhet, större och mindre kunde afgöras. Vi vilja nu undersöka, på hvad sätt samma problem kan och bör behandlas för våra grupper $((a))$. Vi skola härvid finna, huru i själfva verket äfven samtliga grupper $((a))$ kunna ombildas till en gemensam, enhetlig form.

Vi ha sett (§ 4), att om δ är ett tal, hvilket innehålles i gruppen $((a))$, så finnes alltid ett helt tal n sådant, att

$$n\delta < ((a)) \leq (n + 1)\delta.$$

Låt oss att börja med antaga, att gruppen $((a))$ icke

[1] l. c.

innehåller enheten 1. Låt m vara ett helt tal, större än 1. I talföljden $\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}, \ldots$ är hvarje efterföljande tal mindre än hvarje föregående. Genom att välja det hela talet γ tillräckligt stort kan man vidare ernå, att $\frac{1}{m^\lambda}$ blir mindre än hvilket angifvet tal huru litet som hälst. Det finnes således ett första tal $\frac{1}{m^\lambda}$, hvilket innehålles i $((a))$. Således finnes också ett tal n_λ (§ 4) sådant, att

$$\frac{n_\lambda}{m^\lambda} < ((a)) \leq \frac{n_\lambda + 1}{m^\lambda}.$$

Då nu $\frac{1}{m^{\lambda+1}} > \frac{1}{m^{\lambda+2}} > \frac{1}{m^{\lambda+3}} > \ldots$ alla innehållas i $((a))$, erhåller man ett obegränsadt antal olikheter

$$\frac{n_\mu}{m^\mu} < ((a)) \leq \frac{n_\mu + 1}{m^\mu}; \; \mu = \lambda, \lambda + 1, \lambda + 2, \ldots$$

Af desamma följer

$$\frac{m \cdot n_\mu}{m^{\mu+1}} < ((a)) \leq \frac{m \cdot n_\mu + m}{m^{\mu+1}}$$

$$\frac{n_{\mu+1}}{m^{\mu+1}} < ((a)) \leq \frac{n_{\mu+1} + 1}{m^{\mu+1}}$$

och således

$$m \cdot n_\mu < n_{\mu+1} + 1$$

$$n_{\mu+1} < m \cdot n_\mu + m$$

eller

$$m \cdot n_\mu \leq n_{\mu+1} \leq m \cdot n_\mu + m_1,$$

där m_1 är det hela tal, som närmast föregår m.

Det kan emellertid icke inträffa, att

$$m \cdot n_\mu = n_{\mu+1}$$

från och med en viss index μ. Ty om detta vore fallet, hade man från och med detta μ

$$
\begin{aligned}
m \cdot n_\mu &= n_{\mu+1} \\
m^2 \cdot n_\mu &= m \cdot n_{\mu+1} = n_{\mu+2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m^{\mu'} \cdot n_\mu &= n_{\mu+\mu'}. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Å andra sidan kan man alltid, enär $\frac{n_\mu}{m^\mu} < ((a))$, välja μ' så stor, att

$$\frac{n_\mu}{m^\mu} + \frac{1}{m^{\mu+\mu'}} < ((a))$$

eller

$$\frac{m^{\mu'} \cdot n_\mu + 1}{m^{\mu+\mu'}} < ((a)),$$

hvaraf åter följer

$$m^{\mu'} \cdot n_\mu + 1 < n_{\mu+\mu'} + 1$$

eller

$$m^{\mu'} \cdot n_\mu < n_{\mu+\mu'},$$

hvilket strider mot antagandet $m \cdot n_\mu = n_{\mu+1}$ från och med en viss index μ.

Låt oss nu införa en följd af hela tal h_μ; $\mu = \lambda, \lambda + 1, \lambda + 2 \ldots$, alla mindre än m samt definierade genom likheterna

$$h_\lambda = n_\lambda$$

$$n_{\mu+1} = m \cdot n_\mu + h_{\mu+1};\ \mu = \lambda, \lambda + 1, \lambda + 2, \ldots,$$

bland hvilka saknas såväl alla tal h_μ, där μ föregår λ, som äfven alla tal $h_{\mu+1}$, för hvilka $n_{\mu+1} = m \cdot n_\mu$. Af denna definition på talen h_μ följer

$$\frac{n_{\lambda+1}}{m^{\lambda+1}} = \frac{n_\lambda}{m^\lambda} + \frac{h_{\lambda+1}}{m^{\lambda+1}} = \frac{h_\lambda}{m^\lambda} + \frac{h_{\lambda+1}}{m^{\lambda+1}}$$

$$\frac{n_{\lambda+2}}{m^{\lambda+2}} = \frac{n_{\lambda+1}}{m^{\lambda+1}} + \frac{h_{\lambda+2}}{m^{\lambda+2}} = \frac{h_\lambda}{m^\lambda} + \frac{h_{\lambda+1}}{m^{\lambda+1}} + \frac{h_{\lambda+2}}{m^{\lambda+2}}$$

och således

$$\frac{n_\mu}{m^\mu} = \frac{h_\lambda}{m^\lambda} + \frac{h_{\lambda+1}}{m^{\lambda+1}} + \ldots + \frac{h_\mu}{m^\mu}$$

$$\mu = 1, 2, 3 \ldots$$

Bilda vi nu en grupp af talen $\frac{h_\nu}{m^\nu}$, ordnade i följden $\nu = 1, 2, 3 \ldots$, hvilken vi skrifva $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$, så är

$$((a)) = \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right).$$

Låt nämligen $\frac{p}{q}$ vara ett egentligt bråk, som innehålles i $((a))$. Man kan uppenbarligen välja ett helt tal μ så stort, att $\frac{p}{q} + \frac{1}{m^\mu} < ((a))$. Å andra sidan är

$$((a)) \leq \frac{n_\mu}{m^\mu} + \frac{1}{m^\mu}$$

och således

$$\frac{p}{q} < \frac{n_\mu}{m^\mu} = \frac{h_\lambda}{m^\lambda} + \frac{h_{\lambda+1}}{m^{\lambda+1}} + \ldots + \frac{h_\mu}{m^\mu} < \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right).$$

$\frac{p}{q}$ innehålles i $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ likaväl som i $((a))$.

Om man åter förutsätter, att $\frac{p}{q}$ innehålles i $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$, kan man alltid välja μ så stor, att

$$\frac{p}{q} < \frac{h_\lambda}{m^\lambda} + \frac{h_{\lambda+1}}{m^{\lambda+1}} + \ldots + \frac{h_\mu}{m^\mu} = \frac{n_\mu}{m^\mu}$$

och att således — enär

$$\frac{n_\mu}{m^\mu} < ((a)) \text{ —}$$

$\frac{p}{q}$ innehålles i $((a))$.

Hvarje tal, som innehålles i $((a))$, innehålles äfven i $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ och vice versa.

Således är

$$((a)) = \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right).$$

Q. e. d.

Vi ha förutsatt, att gruppen $((a))$ icke innehöll talet 1. Skulle åter detta vara fallet eller $((a))$ innehålla ett största helt tal N, ha vi endast att till gruppen $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ som element tillfoga talet N.

Vi anteckna till slut, att problemet om jämförelse mellan tvänne olika sammansatta grupper, hvilka ingendera innehålla talet 1, numera erhållit den förenkling, att tvänne grupper $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ alltid och endast i det fall äro lika hvarandra, att mot samma ν i båda alltid svarar samma h_ν, eller, att om för ett visst ν i den ena gruppen saknas ett motsvarigt h_ν, detsamma är fallet i den andra gruppen, och att om likhet icke äger rum, man endast har att i båda grupperna genomlöpa följden h_1, h_2, h_3 ..., till dess man träffar mot samma ν svarande olika h_ν (den grupp är den större, där h_ν är det större) eller man träffar ett h_ν, som icke har någon motsvarighet i den andra gruppen. Skulle åter vår grupp innehålla talet 1, är den grupp den större, som har till element det större hela talet.

Vi ha lyckats transformera gruppen $((a))$, inom hvilken ingen bestämd ordning mellan elementen var förutsatt, i en ny grupp, där elementen äro entydigt tillordnade talföljden $\nu = 1, 2, 3$ ..., så att till hvarje tal är tillordnadt endast ett eller intet element h_ν och att det sista icke kan inträffa för alla ν från och med ett visst gifvet. Bildningslagen för talen h_ν och härmed för gruppen $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ förutsätter ett obegränsadt antal operationer. Detta är tydligen ofrånkomligt, för såvidt transformationen af $((a))$ i en enhetligt bestämd grupp $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ skall omfatta de allmännast möjliga grupper $((a))$.

Om man inför $m = 10$, erhåller man den bekanta framställningen genom oändligt decimalbråk.

Problemet om en enhetlig framställning af gruppen $((a))$ kan, man ser det lätt, lösas på många olika sätt. Ett af de mest kända är framställningen genom kedjebråk. Vi ha emellertid valt att i det föregående liksom i närmast följande båda paragrafer, där vår uppgift blir att härleda de djupt liggande satser af Weierstrass och Cantor, hvilka vi i § 6 uttalat, följa Weierstrass' eget bevisningssätt samt begagna den form han valt för framställning af gruppen $((a))$.

Uppgiften att vinna en enhetlig framställning af olika matematiska kombinationer eller, hvilket är detsamma, talkombinationer, hvilken har den största möjliga omfattning, sammanfaller på det närmeste med matematikens uppgift öfverhufvud. Med densamma står eller faller matematiken som vetenskap. En liknande uppgift går för öfrigt igen inom hvarje verklig vetenskap, uppgiften att under enhetlig synpunkt sammanfatta så många som möjligt af vetandets skilda data.

§ 8. Vi återkomma nu till följande sats, hvilken vi uttalat i § 6.

»Låt $A < B$ vara tvänne tal, hvarandra hur närbelägna som hälst. Det finnes alltid en grupp $((a))$ belägen mellan A och B, $A < ((a)) < B$, hvilken icke är lika med något vare sig helt eller brutet tal.«

Bevismetoden sammanfaller så godt som helt och hållet med Weierstrass' bevismetod vid härledningen af satsen beträffande gränsställen (cf. § 6), men vår framställning vinner i öfverskådlighet, om vi först härleda ofvan anförda satser.

Låt oss med $[a_\nu; \nu = 1, 2, 3 \ldots]$ beteckna sammanfattningen af alla hela och brutna tal tillordnade följden af alla hela tal 1, 2, 3 ..., så att mot hvarje helt tal ν svarar ett och endast ett helt eller brutet tal a_ν samt omvändt, mot hvarje tal a_ν ett och endast ett tal ν (cf. Kapitel II, § 7).

Inom hvarje intervall $[A < B]$, det må vara huru litet som hälst, finnes alltid ett obegränsadt antal, på detta sätt definierade tal a_ν (Kap. II, § 7). Låt oss utgå från ett visst dylikt intervall $[A < B]$ och låt oss med a_{θ_1} beteckna det tal a_ν med lägsta index $\nu = \theta_1$, hvilket inbegripes inom intervallet $[A < B]$ eller med andra ord det första af våra tal a_ν, hvilket inbegripes inom detta intervall. Man har således

$$A \leq a_{\theta_1} \leq B; \ \theta_1 \geq 1,$$

hvarvid — om $\theta_1 > 1$ — intet af talen $a_1, a_2 \ldots a_{\theta_1 - 1}$ tillhör intervallet $[A < B]$. Låt oss härefter dela intervallet $[A < B]$ i $m \geqq 3$ lika stora intervall

$$\left[A < A + \frac{1}{m}(B - A)\right], \left[A + \frac{1}{m}(B - A) < A + \frac{2}{m}(B - A)\right] \ldots$$
$$\left[A + \frac{m-1}{m}(B - A) < B\right].$$

Bland dessa intervall finnes nödvändigt ett första

$$\left[A + \frac{n_1}{m}(B - A) < A + \frac{n_1 + 1}{m}(B - A)\right]; \ 0 \leq n_1 \leq m - 1,^{1}$$

[1]) Oaktadt tecknet 0 ännu icke blifvit definieradt, begagna vi oss dock här för korthetens skull af beteckningen $0 \leq n_1$; $0 < n_1$ betyder då, att n_1 är ett helt tal; $0 = n_1$ betyder, att n_1 icke förekommer och att således $A + \frac{n_1}{m}(B - A)$ i detta fall är A samt $A + \frac{n_1 + 1}{m}(B - A)$ är $A + \frac{1}{m}(B - A)$ och att n_2 etc. icke förekommer.

hvilket icke inbegriper a_{θ_1} och således icke heller något af talen $a_1, a_2, \ldots a_{\theta_1}$.

Låt oss nu med a_{θ_2} förstå det första af våra tal a_ν, hvilket tillhör detta intervall och för hvilket således

$$A + \frac{n_1}{m}(B - A) \leq a_{\theta_2} \leq A + \frac{n_1 + 1}{m}(B - A);$$

$$0 \leq n_1 \leq m - 1; \ \theta_2 > \theta_1$$

samt dela äfven det så erhållna intervallet i m lika delar. Bland de då erhållna nya delintervallen finnes nödvändigt ett första

$$\left[A + \frac{n_2}{m_2}(B - A) < A + \frac{n_2 + 1}{m_2}(B - A)\right];$$

$$m \cdot n_1 \leq n_2 \leq m \cdot n_1 + m - 1,$$

hvilket icke inbegriper a_{θ_2} och således intet af talen a_1, $a_2, \ldots a_{\theta_1}, a_{\theta_1 + 1}, \ldots a_{\theta_2}$.

Om vi fortsätta detta förfarande, erhålla vi ett intervall

$$\left[A + \frac{n_\mu}{m^\mu}(B - A) < A + \frac{n_\mu + 1}{m^\mu}(B - A)\right];$$

$$m \cdot n_{\mu - 1} \leq n_\mu \leq m \cdot n_{\mu - 1} + m - 1,$$

hvilket icke inbegriper något af talen

$$a_1, a_2, \ldots a_{\theta_1}, a_{\theta_2}, \ldots a_{\theta_\mu} \ (1 \leq \theta_1 < \theta_2 \ldots < \theta_\mu),$$

och där $a_{\theta_{\mu+1}}$ är det första tal a_ν, som inbegripes i intervallet. Hvarje nytt intervall är en del af det närmast föregående. Det kan dock icke inträffa, att från och med ett gifvet μ, låt vara $\mu = \lambda$, en af de båda likheterna $n_{\mu+1} = m \cdot n_\mu$ eller $n_{\mu+1} = m \cdot n_\mu + m - 1$ städse äger rum. Om så vore fallet, vore nämligen antingen $A + \frac{n_\mu}{m^\mu}(B - A)$ eller $A + \frac{n_\mu + 1}{m^\mu}(B - A)$ från och med $\mu = \lambda$ alltid samma tal, låt oss sätta C. Talet C är åter ett af våra tal a_ν, låt vara $a_{\bar{\nu}}$. Då nu alltid $\mu \leq \theta_\mu$ och intet af talen $a_1, a_2, \ldots$ a_{θ_μ} tillhör intervallet

$$\left[A + \frac{n_\mu}{m^\mu}(B - A) < A + \frac{n_\mu + 1}{m^\mu}(B - A)\right],$$

följer, att C icke kan tillhöra ett sådant intervall, så snart $\mu > \bar{\nu}$. Således är $\frac{n_\mu}{m^\mu} > \frac{n_\lambda}{m^\lambda}$, så snart μ väljes tillräckligt stor. Ingendera af likheterna $n_{\mu+1} = m \cdot n_\mu$ eller $n_{\mu+1} = m \cdot n_\mu + m - 1$ kan således äga rum från och med ett visst tal μ.

Vi återgå nu till vår bevismetod i föregående paragraf. Vi sätta

$$n_1 = h_1 \leq m - 1$$
$$n_{\mu+1} = m \cdot n_\mu + h_{\mu+1};\ h_{\mu+1} \leq m - 1;\ \mu = 1, 2, 3 \ldots$$

där, som vi visat, talet $h_{\mu+1}$ endast saknas, när

$$n_{\mu+1} = n \cdot n_\mu.$$

Hvarken denna likhet eller likheten

$$n_{\mu+1} = m - 1$$

kunna, som vi visat, äga rum från och med ett visst tal μ.

Vi bilda nu gruppen $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$; $\nu = 1, 2, 3 \ldots$

Gruppen

$$A + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)(B - A) = \left(\left(A \cdot \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}(B - A)\right)\right)\right)\right)^{1}$$

»innehåller« då alla tal

$$A + \left(\frac{h_1}{m} + \frac{h_2}{m_2} + \ldots \frac{h_\mu}{m^\mu}\right)(B - A) = A + \frac{n_\mu}{m^\mu}(B - A)$$

[1]) Härmed förstås en grupp $((a))$, hvars enskilda element äro talet A samt talen $\frac{h_\nu}{m^\nu}(B - A)$; $\nu = 1, 2, 3 \ldots$

och man har således

$$A + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)(B - A) > A + \frac{n_\mu}{m^\mu}(B - A),$$

huru stor man än må välja index μ. Vidare och då likheten

$$\frac{h_{\mu+1}}{m^{\mu+1}} + \frac{h_{\mu+2}}{m^{\mu+2}} + \ldots + \frac{h_{\mu+\mu'}}{m^{\mu+\mu'}}$$
$$= \frac{m-1}{m^{\mu+1}}\left(1 + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m^{\mu'-1}}\right)$$

icke kan äga rum för alla tal μ', som äro större än ett visst gifvet tal, och det således, om μ' väljes tillräckligt stor, alltid finnes ett tal $\overline{\mu} < \mu'$ så stort, att $h_{\mu+\overline{\mu}} < m - 1$, så har man för sådana värden på μ'

$$\frac{h_{\mu+1}}{m^{\mu+1}} + \frac{h_{\mu+2}}{m^{\mu+2}} + \ldots + \frac{h_{\mu+\mu'}}{m^{\mu+\mu'}} < \frac{m-1}{m^{\mu+1}}\left(1 + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m^{\mu'-1}}\right)$$
$$\leq \frac{m-1}{m^{\mu+1}}\left(1 + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m^{\mu'-1}}\right) - \frac{1}{m^{\mu+\overline{\mu}}}$$
$$= \frac{1}{m^\mu}\left(1 - \frac{1}{m^{\mu'}}\right) - \frac{1}{m^{\mu+\overline{\mu}}}$$
$$< \frac{1}{m^\mu} - \frac{1}{m^{\mu+\overline{\mu}}}$$

och således, hur stor man än väljer μ'

$$\frac{n_\mu}{m^\mu} + \frac{h_{\mu+1}}{m^{\mu+1}} + \ldots + \frac{h_{\mu+\mu'}}{m^{\mu+\mu'}} < \frac{n_\mu + 1}{m^\mu} - \frac{1}{m^{\mu+\overline{\mu}}}$$

hvaraf åter följer

$$\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right) < \frac{n_\mu + 1}{m^\mu}$$

samt härmed

$$A + \frac{n_\mu}{m^\mu}(B - A) < A + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)(B - A) < A + \frac{n_\mu + 1}{m^\mu}(B - A)$$

hvilket äger rum, huru stort man än väljer talet μ.

Häraf följer åter, att talet

$$A + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)(B - A)$$

icke kan vara lika med något helt eller brutet tal $a_{\bar{\nu}}$, ty om man väljer $\mu \geq \bar{\nu}$, ligga samtliga tal a_ν, hvilkas index är mindre eller lika med θ_μ, som åter är större eller lika med μ, utanföre intervallet

$$\left[A + \frac{n_\mu}{m^\mu}(B - A) < A + \frac{n_\mu + 1}{m^\mu}(B - A)\right] \text{ Q. e. d.}$$

Vi ha härmed bevisat tillvaron af en grupp $A + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)(B - A)$, hvilken utan att vara lika med något helt eller brutet tal, är belägen mellan tvänne gifna hvarandra huru närbelägna tal som hälst $A < B$. Gången af vår bevisning har varit, att vi aritmetiskt framställt talet $A + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)(B - A)$. Ett karakteristiskt drag för den Weierstrassiska funktionsteorien är, som vi öfver allt skola finna, att Weierstrass alltid söker föra beviset för tillvaron af det ena eller andra matematiska objektet så, att han för detsamma härleder en bestämd aritmetisk framställning.

§ 9. Vi öfvergå nu till den Weierstrassiska satsen (§ 6). Vi ha sett, att med gränsställe förstås en grupp sådan, att om densamma instänges mellan tvänne gränser (= tvänne andra grupper), hvilka flyttas hvarandra huru nära som hälst, så finnes alltid mellan dem ett obegränsadt antal andra grupper.

Låt nu A och B, där $A < B$, vara tvänne grupper $((a))$ och antag, att mellan dem finnes ett obegränsadt antal andra grupper $((a))$. Dela som i föregående paragraf intervallet $[A < B]$ uti m $(m \geq 2)$ lika delar

$$\left[A < A + \frac{1}{m}(B - A)\right], \left[A + \frac{1}{m}(B - A) < A + \frac{2}{m}(B - A)\right],$$

$$\ldots \left[A + \frac{m-1}{m}(B - A) < B\right],$$

Det finnes då ett första intervall

$$\left[A < A + \frac{1}{m}(B - A)\right]$$

eller

$$\left[A + \frac{n_1}{m}(B - A) < A + \frac{n_1 + 1}{m}(B - A)\right]; \; 1 \leq n_1 \leq m - 1,$$

hvilket inbegriper ett obegränsadt antal grupper $((a))$. Om vi ytterligare dela detta intervall i m delar, finns på samma sätt bland då erhållna nya intervall ett första

$$\left[A + \frac{n_2}{m^2}(B - A) < A + \frac{n_2 + 1}{m^2}(B - A)\right];$$

$$m \cdot n_1 \leq n_2 \leq m \cdot n_1 + m - 1,$$

hvilket inbegriper ett obegränsadt antal grupper $((a))$. Genom att fortsätta på samma sätt erhålla vi en rad intervall

$$\left[A + \frac{n_\mu}{m^\mu}(B - A) < A + \frac{n_\mu + 1}{m^\mu}(B - A)\right];$$

$$m \cdot n_\mu \leq n_{\mu+1} \leq m \cdot n_\mu + m - 1; \; \mu = 1, 2, 3 \ldots,$$

om hvilka gäller, att hvarje efterföljande är en del af det föregående, samt hvilka alla inbegripa ett obegränsadt antal grupper $((a))$. Talet

$$\left(A + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)(B - A)\right),$$

där

$$h_{\mu+1} + m \cdot n_\mu = n_{\mu+1}$$

inbegripes i samtliga dessa intervall. Då desamma genom att öka talet μ kunna minskas under hvarje gräns, så följer, att talet $A + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)(B - A)$ är ett gränsställe, hvarmed vår sats är bevisad.

I olikhet mot hvad fallet var vid användingen i §§ 7 och 8 af Weierstrass' slutledningar, kan här inträffa, att i talet $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ samtliga bråk från och med ett visst ν saknas. Äfvenså gäller, att den grupp, man erhåller som gränsställe, såväl kan vara lika med som icke lika med ett helt eller brutet tal.

§ 10. Vi öfvergå nu till att uppvisa, huru talens räknelagar kunna bringas att oförändradt gälla för våra grupper $((a))$. Vi ha sett, att dessa grupper äro strängt definierade talobjekt, hvilka på samma gång de omfatta de hela och de brutna talen ha en realitet, hvilken är gifven i och med talens egen. Kunna vi nu härtill visa att talens räknelagar oförandrade gälla för desamma, att man kan räkna med grupper $((a))$ på alldeles samma sätt som med tal, så är härmed ådagalagdt, att de äro tal och tal i vidare omfattning än vi förut känna.

Vi börja med begreppet s u m m a af grupper. Detta begrepp framträder så godt som omedelbart. Det är nämligen tydligt, att en grupp, bildad af elementen $a + b$, där a är elementen i en grupp $((a))$ och b elementen i en grupp $((b))$, själf är en grupp $((a + b))$. Det finnes nämligen alltid ett tal l så stort, att det icke innehålles i hvarken $((a))$ eller $((b))$. Häraf följer åter, att talet $2l$ icke kan innehållas i en grupp, bildad af elementen $a + b$ och att således $((a + b))$ är en grupp. I öfverensstämmelse härmed blir definitionen å summa:

M e d s u m m a n a f t v ä n n e g r u p p e r $((a))$ o c h $((b))$ f ö r s t å v i g r u p p e n $((a + b))$.

Vi erhålla omedelbart följande satser:

Associationslagen: »$((a)) + [((b)) + ((c))] = [((a)) + ((b))] + ((c))$«

Commutationslagen: »$((a)) + ((b)) = ((b)) + ((a))$« samt:

»Vid summation af ett flertal grupper (a) är summationens ordningsföljd likgiltig.«

Om $((a)) + ((b)) = ((c))$, är $((a)) < ((c))$, $((b)) < ((c))$«.

»Om $((a)) = ((b))$, $((c)) = ((d))$, så är $((a)) + ((c)) = ((b)) + ((d))$.«

»Om $((a)) > ((b))$, $((c)) > ((d))$, så är $((a)) + ((c)) > ((b)) + ((d))$.«

»Om $((a)) \doteq ((b))$ och $((c)) \geq ((d))$ så är $((a)) + ((c)) > ((b)) + ((d))$.«

»Om $((a)) = ((b))$ och $((a)) + ((c)) > ((b)) + ((d))$, så är $((c)) > ((d))$.«

»Om $((a)) < ((b))$ samt $((a)) + ((c)) > ((b)) + ((d))$ så är $((c)) > ((d))$.«

»Om $((a)) \overset{=}{<} ((b))$ och $((a)) + ((c)) = ((b)) + ((d))$, så är $((c)) > ((d))$.«

»Om $((a)) = ((b))$ och $((a)) + ((c)) = ((b)) + ((d))$, så är $((c)) = ((d))$.«

Samma lagar, som gälla addition af tal, gälla således oförändrade vid addition af grupper $((a))$.

Häraf följer åter, att vi kunna behandla grupper (A), hvilkas element A äro grupper $((a))$, på samma sätt som de grupper, där dessa element äro tal.

Låt nämligen (A) vara en grupp, hvars element äro grupper $((a))$. I öfverensstämmelse med § 1 kommer

»ett tal eller en grupp l att innehållas i en grupp, bildad af element $((a))$, om man från gruppen kan frånskilja ett antal element, hvilkas summa är större än l.«

»Elementen $A = ((a))$ bilda en grupp $((A))$, om det finnes ett tall l, hvilket icke innehålles i gruppen.«

»Likhet mellan tvänne grupper $((a))$ och $((b))$, $((a)) = ((b))$, $((b)) = ((a))$, där elementen a och b själfva äro grupper, äger rum, när hvarje tal, som innehålles i den ena gruppen också innehålles i den andra, hvaremot $((a)) > ((b))$, $((b)) < ((a))$, när det finnes ett tal, som innehålles i $((a))$ utan att innehållas i $((b))$.«

Den härledning, genom hvilken vi (§ 7) bringat våra grupper $((a))$ under den enhetliga formen $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ blir ord för ord densamma, om man i stället för talen a inför grupper $((a))$. »Talvärlden inbegriper icke andra grupper än sådana, som kunna framställas under formen $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$.«

§ 11. Sedan vi infört begreppet summa af grupper, inser man omedelbart, huruledes Georg Cantors sats (§ 6) innehålles i den beviskedja, hvilken vi i § 8 upprullat. Vi ha vid densamma utgått från följden af samtliga hela och brutna tal a_ν, entydigt tillordnade följden af de hela talen 1, 2, 3 . . . Om vi nu i stället för talen a_ν införa med hvarandra olika grupper $((a))_\nu$, hvilka bilda en obegränsad följd $((a))_1$, $((a))_2$, $((a))_3$ . . . entydigt tillordnade de hela talen 1, 2, 3 . . ., så bli alla slutföljder oförändradt desamma, som då talen a_ν voro de hela och brutna talen.

Vi kunna alltid bilda en grupp $((a))$, hvilken icke är lika med någon af grupperna $((a))_\nu$ och som är belägen mellan tvänne hvilka som hälst af desamma.

Grupperna $((a))$ kunna icke samtliga, som fallet var med de hela och brutna talen, ordnas i en följd, entydigt tillordnad talen 1, 2, 3 . . .

Man erhåller däremot samtliga grupper $((a)) \leq 1$, om man i uttrycket $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ [§ 7] låter talen h_ν hvart och ett för sig antaga alla heltalsvärden $\leq m - 1$ eller försvinna ur uttrycket (utan att alla på en gång eller alla från och med ett visst ν försvinna).

Vi ha genom införande af grupperna $((a))$ träffat på en oändlighet af högre art än den intuitivt gifna oändlighet, hvilken var sammanfattningen af alla hela tal 1, 2, 3... Vi stå inför begreppet kontinuum.

Kontinuet är sammanfattningen af alla grupper $((a))$.

»De olika grupper, som bilda kontinuet, kunna icke samtliga entydigt tillordnas talföljden 1, 2, 3 ...«

§ 12. Återstår närmast att undersöka, huruvida samma sats, som gällde skillnad mellan tvänne tal (kapitel I, § 6), kan utsträckas att gälla skillnad mellan två grupper. Detta är, som vi lätt skola se, verkligen fallet.

»Om $((b)) > ((a))$, kan man alltid bilda en ny grupp $((c))$ sådan, att $((b)) = ((a)) + ((c))$.«

Antag $((b)) = h' + \left(\left(\frac{h'_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ och $((a)) = h + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$ (cf. § 7), där h' och h äro hela tal, af hvilka enbart h eller båda h' och h kunna saknas, samt $h'_\nu \leq m - 1$ och $h_\nu \leq m - 1$, och beträffande såväl h'_ν som h_ν gäller, att de för vissa index ν kunna saknas i respektive grupper, men att detta dock icke kan äga rum från och med en viss minsta index.

Enär $((b)) > ((a))$ finnes alltid ett tal l, som innehålles i $((b))$ utan att innehållas i $((a))$. Således är alltid

$$l \geq h + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$$

och således

$$l > h + \frac{h_1}{m} + \frac{h_2}{m^2} + \ldots + \frac{h_\nu}{m^\nu} = \frac{n_\nu}{m^\nu} \geq \frac{1}{m^\nu}$$

samt om man fastställer λ tillräckligt stor

$$h' + \frac{h'_1}{m} + \frac{h'_2}{m^2} + \ldots + \frac{h'_\nu}{m^\nu} = \frac{n'_\nu}{m^\nu} > l;\ \nu = \lambda, \lambda + 1, \lambda + 2, \ldots,$$

hvaraf åter följer

$$\frac{n'_\nu}{m^\nu} > \frac{n_\nu}{m^\nu};\ \nu = \lambda,\ \lambda + 1,\ \lambda + 2 \text{ etc.} \ldots$$

eller $n'_\nu - 1 \geq n_\nu \geq 1$.

Å andra sidan är

$$1 = \left(\frac{m - 1}{m^\nu}\right)$$

och gruppen $((b))$ kan således uttryckas under formen

$$((b)) = \frac{n'_\lambda - 1}{m^\lambda} + \frac{1}{m^\lambda} + \left(\left(\frac{h'_{\lambda+\mu}}{m^{\lambda+\mu}}\right)\right)$$

$$= \frac{n'_\lambda - 1}{m^\lambda} + \left(\left(\frac{m - 1}{m^{\lambda+\mu}}\right)\right) + \left(\left(\frac{h'_{\lambda+\mu}}{m^{\lambda+\mu}}\right)\right)$$

$$= \frac{n'_\lambda - 1}{m^\lambda} + \left(\left(\frac{h'_{\lambda+\mu} + m - 1}{m^{\lambda+\mu}}\right)\right);\ \mu = 1,\ 2,\ 3 \ldots$$

Vidare är

$$h'_\nu + m - 1 \geq h_\nu \text{ och } h'_\nu + m - 1 \leq 2\,(m - 1).$$

Låt oss nu införa en serie af likheter

$$n_\lambda + k_\lambda = n'_\lambda - 1$$

$$h_{\lambda+\mu} + k_{\lambda+\mu} = h'_{\lambda+\mu} + m - 1,$$

så erhålla vi uti $\frac{k_\lambda}{m^\lambda} + \left(\left(\frac{k_{\lambda+\mu}}{m^{\lambda+\mu}}\right)\right)$ den sökta gruppen $((c))$.

Ty

$$((b)) = \frac{n'_\lambda - 1}{n^\lambda} + \left(\left(\frac{h'_{\lambda+\mu} + m - 1}{m^{\lambda+\mu}}\right)\right)$$

$$= \frac{n_\lambda}{m^\lambda} + \left(\left(\frac{h_{\lambda+\mu}}{m^{\lambda+\mu}}\right)\right) + \frac{k_\lambda}{m^\lambda} + \left(\left(\frac{k_{\lambda+\mu}}{m^{\lambda+\mu}}\right)\right) = ((a)) + ((c)):$$

Vissa af talen k_λ, $k_{\lambda+1}, \ldots$ kunna saknas i uttrycket för $((c))$, dock icke alla från och med en viss index, ty i så fall skulle $\left(\left(\frac{h'_{\lambda+\mu}}{m^{\lambda+\mu}}\right)\right)$ icke komma att innehålla ett obegränsadt antal element.

Gruppen $\left(\left(\frac{k_{\lambda+\mu}}{m^{\lambda+\mu}}\right)\right)$ är icke en sådan grupp, som vi betecknat med $\left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right)$, men kan i öfverensstämmelse med § 7 alltid förvandlas i vare sig en sådan grupp eller i summan af en dylik och ett helt tal.

Att gruppen (c) är entydigt bestämd följer af § 10.

Låt oss nu undersöka, hvad som bör förstås med produkt af grupper $((a))$. Låt $((a))$ vara en grupp och m ett tal. Då $((a))$ är en grupp, finnes alltid ett tal l sådant, att $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu < l$, huru stort man än må välja n. Följaktligen är

$$\sum_{\nu=1}^{n} m \cdot a_\nu < m \cdot l,$$

huru stort jag än må välja n. Således den grupp, som bildas af elementen $m \cdot a$ är en grupp $((m \cdot a)) = ((a \cdot m))$.

»Med produkten af talet m och gruppen $((a))$ förstå vi gruppen $((m \cdot a)) = ((a \cdot m))$ och skrifva

$$m \cdot ((a)) = ((a)) \cdot m = ((m \cdot a)) = ((a \cdot m)).«$$

Man erhåller omedelbart

$$»\left[\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\right]\cdot((a)) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\,((a)) = \sum_{\nu=1}^{n}((m_\nu\, a)).«$$

Låt oss nu i $((a))$ och $((b))$ ha tvänne olika grupper. Det finnes alltid ett tal l sådant, att

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu < l,$$

huru stort jag än må välja talet n. Vidare finnes alltid ett tal m sådant, att $((b)) < m$. Man erhåller således

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\,((b)) = \left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right]\cdot((b)) < m\cdot l.$$

Följaktligen är en grupp bildad af elementen $a\cdot((b)) = ((b))\cdot a$, en grupp $\Big(\big(a\,((b))\big)\Big) = \Big(((b))\,a\Big)$ och på samma sätt en grupp, bildad af elementen $b\cdot((a)) = ((a))\cdot b$ en grupp $\Big(\big(b\,((a))\big)\Big) = \Big(\big(((a))\,b\big)\Big)$.

Låt nu l vara ett tal, som innehålles i gruppen $\Big(\big(a\cdot((b))\big)\Big)$. Det finnes då alltid ett tal n så stort, att

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} a_\nu\,((b)) > l$$

och således också

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} a_\nu\,((b)) > l + \delta$$

om δ väljes tillräckligt liten. Å andra sidan finnes alltid ett tal n_2 så stort, att

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} a_\nu\,((b))^{n_2+1} < \delta.^{1}$$

[1] Cf. rörande beteckningssättet $((b))^{n_2+1}$ § 4.

Således

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} a_\nu \left[\sum_{\mu=1}^{n_2} b_\mu + ((b))^{n_2+1}\right] > l + \delta,$$

hvaraf följer

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} a_\nu \left[\sum_{\mu=1}^{n_2} b_\mu\right] > l$$

eller

$$\sum_{\mu=1}^{n_2} b_\mu \sum_{\nu=1}^{n_1} a_\nu > l.$$

Häraf följer åter

$$\sum_{\mu=1}^{n_2} b_\mu ((a)) > l.$$

Talet l, som innehålles i $\big(a((b))\big)$, innehålles alltid samtidigt i $\big(b((a))\big)$, och likheten

$$\Big(\big(a((b))\big)\Big) = \Big(\big(b((a))\big)\Big)$$

äger följaktligen rum.

Definitionen på produkt blir uppenbarligen:

»Med produkten af gruppen $((a))$ och gruppen $((b))$, $((a))\cdot((b))$, förstås gruppen $\Big(\big(a((b))\big)\Big) = \Big(\big(b((a))\big)\Big)$.«

Vi ha redan sett, att commutationslagen

$$»((a))\cdot((b)) = ((b))\cdot((a))«$$

äger rum. En enkel betraktelse visar, att detta äfven är fallet med associationslagen eller att

$$»\big[((a))\cdot((b))\big]\cdot((c)) = ((a))\cdot\big[((b))\cdot((c))\big].«$$

Man ser äfven, att vid multiplikation af ett begränsadt flertal af grupper $((a))$ är det likgiltigt, i hvilken ordning multiplikationen företages. Man erhåller alltid till slutresultat en och samma grupp.

Vidare gäller:

»Om $((a)) = ((b))$ och $((c)) \geqq ((d))$, så är $((a)) \cdot ((c)) \geqq ((b)) \cdot ((d))$.«

Om $((a)) > ((b))$ och $((c)) > ((d))$, så är $((a)) \cdot ((c)) > ((b)) \cdot ((d))$.

samt omvändt

»Om $((a)) = ((b))$ och $((a)) \cdot ((c)) > ((b)) \cdot ((d))$, så är $((c)) \gtrless ((d))$.

Om $((a)) = ((b))$ och $((a)) \cdot ((c)) = ((b)) \cdot ((d))$, så är $((c)) = ((d))$.

Om $((a)) > ((b))$ och $((a)) \cdot ((c)) = ((b)) \cdot ((d))$, så är $((c)) < ((d))$.«

§ 14. Vi ha visat, huru lagarna för addition (§ 10), subtraktion (§ 12) samt multiplikation (§ 13) oförändrade gälla för våra grupper $((a))$. Begreppet division gäller likaledes oförändradt.

»Om $((b))$ och $((a))$ äro tvänne gifna grupper, kan man alltid bilda en ny grupp $((c))$ sådan, att $((b)) = ((a)) \cdot ((c))$.«

Låt nämligen m vara ett helt tal, som icke innehålles i $((a))$. Det finnes alltid en grupp $((\alpha))$ sådan, att (§ 12)

$$m = ((a)) + ((\alpha))$$

och att således

$$1 = \frac{((a))}{m} + \frac{((\alpha))}{m}.$$

Låt oss nu införa en ny grupp

$$((\beta)) = 1 + \left(\left(\left[\frac{((\alpha))}{m}\right]^{\nu}\right)\right); \ \nu = 1,\ 2,\ 3\ldots$$

Man har

$$\frac{((\alpha))}{m} \cdot ((\beta)) = \left(\left[\frac{((\alpha))}{m}\right]^{\nu}\right); \ \nu = 1,\ 2,\ 3\ldots$$

och således

$$((\beta)) = 1 + \frac{((\alpha))}{m} \cdot ((\beta))$$

samt om vi å båda sidor om likhetstecknet addera $\frac{((a))}{m}((\beta))$

$$((\beta)) + \frac{((a))}{m}((\beta)) = 1 + \frac{((a))}{m} + \frac{((\alpha))}{m}((\beta)) = 1 + ((\beta)).$$

Häraf följer åter

$$\frac{((a))}{m} \cdot ((\beta)) = 1$$

och således

$$((a))\,\frac{((b))}{m} \cdot ((\beta)) = ((b))$$

$$((c)) = \frac{((b))}{m} \cdot ((\beta)).$$

Vi ha nu visat, huru samtliga lagar för addition, subtraktion, multiplikation och division, hvilka vi i kapitel I och II härledt för de hela och brutna talen, oförändrade gälla för våra grupper $((a))$.

Grupperna $((a))$, hvilka omfatta de hela och brutna talen och hvilka samtidigt ha en långt vidsträcktare giltighet, äro själfva tal. De kunna med fog nämnas allmänna tal. Den öfliga benämningen för desamma, så snart de icke äro hela eller brutna, är inkommensurabla tal. Då dessa länge och allt intill nyaste tider icke betraktades som begreppsligt gifna objekt, utan antingen som geometriska, genom åskådning vunna storheter eller som symboler, underkastade de verkliga talens räknelagar, kom äfven den alltfortfarande begagnade benämningen irrationella tal att beträffande desamma vinna burskap. I motsats härtill sammanfattades då de hela och brutna talen under den ännu alltjämt antagna benämningen rationella tal.

Sedan vi nu visat, att $((a))$ kan behandlas på alldeles samma sätt som de tal a, hvilka vi förut kallat absoluta tal, inbegripa vi härefter äfven talen $((a))$ under denna benämning. Det allmänna talet i ett talsystem med e som grundenhet kommer således att tecknas $e \cdot ((a))$ och lyder samma räknelager som $e \cdot a$, där a är ett rationelt tal.

§ 15. Det historiskt första problem, hvilket efter årtusendens mer eller mindre medvetet sökande slutligen genom införande af gruppen $((a))$ eller det allmänna absoluta talet erhållit en verklig lösning, torde ha varit den begreppsliga tolkningen af den geometriska erfarenhet, att kvadratens sida och diagonal icke kunna mätas med något gemensamt mått. Vid sökandet efter ett tal x, som uppfyller likheten

$$x^2 = 2,$$

finner man omedelbart, att det icke finnes något dylikt tal (helt eller brutet tal), men den geometriska åskådningen ger oss dock för det sökta obekanta, för x, ett visst något. Hvad är detta något begreppsligt fattadt? Det föregående har lärt oss att besvara denna fråga.

Vi bilda aritmetiskt den grupp $((a))$ eller det allmänna tal, hvilket är vårt sökta x.

Vi komma härvid enklast till målet genom samma slutföljder som i § 7.

Låt oss med P förstå ett helt tal, som icke är produkten af ett helt tal större än ett multipliceradt med sig själf. Låt vidare m vara ett helt tal större än ett. Mot talet $m^{2\nu}$; $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ svarar då alltid ett helt tal $n_\nu > 1$ sådant att

$$\left[\frac{n_\nu}{m^\nu}\right]^2 < P < \left[\frac{n_\nu + 1}{m^\nu}\right]^2$$

och således också ett helt tal $n_{\nu+1}$ sådant att

$$\left[\frac{n_{\nu+1}}{m^{\nu+1}}\right]^2 < P < \left[\frac{n_{\nu+1}+1}{m^{\nu+1}}\right]^2.$$

Man ser, att

$$[n_{\nu+1}+1]^2 > [n_\nu m]^2$$

och således

$$n_{\nu+1}+1 > n_\nu \cdot m$$

$$n_{\nu+1} \geq n_\nu \cdot m.$$

Å andra sidan är äfven

$$n_\nu \cdot m + m > n_{\nu+1}$$

och således är

$$n_\nu \cdot m + m - 1 \geq n_{\nu+1}.$$

Vi införa nu de hela talen $h, h_1, h_2, h_3, \ldots$ som vi definiera genom likheterna

$$h^2 < P < (h+1)^2$$

$$h_1 + n \cdot m = n_1$$

$$h_2 + n_1 \cdot m = n_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_\nu + n_{\nu-1} \cdot m = n_\nu;\ \nu = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Om dessa tal gäller, att så snart $n_{\nu-1} \cdot m \mp n_\nu$

$$h_\nu \leq m - 1$$

samt vidare att så snart $n_\nu \cdot m = n_{\nu+1}$ icke finnes något mot ν svarande tal $h_{\nu+1}$.

Dessutom gäller, att det icke kan inträffa, att från och med ett visst ν, låt vara $\nu = \lambda$

$$n_\nu \cdot m = n_{\nu+1}.$$

Ty emedan

$$\left[\frac{n_\lambda}{m^\lambda}\right]^2 < P < \left[\frac{n_\lambda}{m^\lambda} + \frac{1}{m^{\lambda+\mu}}\right]^2,$$

och man alltid kan välja μ så stor, att

$$\left[\frac{n_\lambda}{m^\lambda} + \frac{1}{m^{\lambda+\mu}}\right]^2 < P \text{ eller } \left[\frac{m^\mu \cdot n_\lambda + 1}{m^{\lambda+\mu}}\right]^2 < P$$

följer

$$m^\mu \cdot n_\lambda + 1 < n_{\lambda+\mu} + 1$$

eller

$$m^\mu \cdot n_\lambda < n_{\lambda+\mu},$$

hvilket åter är oförenligt med $m^\mu \cdot n_\lambda = n_{\lambda+\mu}$ eller att likheten $m \cdot n_\nu = n_{\nu+1}$ äger rum från och med $\nu = \lambda$.

Låt oss nu bilda gruppen

$$S = h + \left(\left(\frac{h_\nu}{m^\nu}\right)\right).$$

Man har, då icke alla h_ν från och med ett visst tal ν kunna i densamma saknas,

$$h + \frac{h_1}{m} + \frac{h_2}{m^2} + \ldots + \frac{h_\nu}{m^\nu} < S.$$

Å andra sidan är

$$h + \frac{h_1}{m} + \frac{h_2}{m^2} + \ldots + \frac{h_\nu}{m^\nu} = \frac{n_\nu}{m^\nu}.$$

Vidare är

$$\frac{h_{\nu+1}}{n^{\nu+1}} + \frac{h_{\nu+2}}{m^{\nu+2}} + \ldots + \frac{h_{\nu+\mu}}{m^{\nu+\mu}}$$

$$< (m-1)\frac{1 - \frac{1}{m^\mu}}{1 - \frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{m^{\nu+1}} < \frac{1}{m^\nu}$$

och således

$$\frac{n_\nu}{m^\nu} < S \leq \frac{n_\nu + 1}{m^\nu}$$

$$\left[\frac{n_\nu}{m^\nu}\right]^2 < S^2 \leq \left[\frac{n_\nu + 1}{m^\nu}\right]^2.$$

Man har således

$$P = \left[\frac{n_\nu}{m^\nu}\right]^2 + \delta$$

$$S^2 = \left[\frac{n_\nu}{m^\nu}\right]^2 + \varepsilon,$$

hvarvid beträffande såväl δ som ε gäller

$$\begin{matrix}\delta \\ \varepsilon\end{matrix} \leq \frac{1}{m^\nu}\left[2\frac{n_\nu}{m^\nu} + \frac{1}{m^\nu}\right]$$

$$= \text{skillnaden mellan } \left[\frac{n_\nu + 1}{m^\nu}\right]^2 \text{ och } \left[\frac{n_\nu}{m^\nu}\right]^2.$$

Då åter P är ett gifvet helt tal, kan aldrig

$$\left[\frac{n_\nu}{m^\nu}\right]^2,$$

som är mindre än P och således ej heller $\frac{n_\nu}{m^\nu}$ växa öfver hvarje gräns. Talen δ och ε kunna således genom att tillräckligt öka ν bringas att bli mindre än hvilket huru litet tal som hälst. Hvarje tal, som innehålles i P, innehålles således äfven i S^2 och likheten

$$P = S^2$$

äger således rum.

Det finnes ett allmänt tal

$$x = S,$$

för hvilket

$$x^2 = P.$$

§ 16. Den härledning af det allmänna absoluta talet, hvilken vi gifvit i det föregående, ansluter sig i allt väsentligt till WEIERSTRASS. Den utarbetades af mig under hösten 1877 som inledning till en föreläsning öfver analytiska funktioner. Jag hade härvid tillgång till en programafhandling af E. KOSSAK (Die Elemente der Arithmetik, Berlin

1872), som innehåller ett försök till redogörelse för Weierstrass' teori, hvilken dock alls icke hade dennes gillande. Weierstrass skrifver exempelvis till mig 5. april 1895 i anledning af en annan fråga:

»Sie wissen, wie meine Einleitung in die Functionentheorie von den Herren Kossak und . . . verhunzt worden ist.« Kossak åberopar sig på en föreläsning af Weierstrass vintersemestern 1865—66. För hvar och en, som är förtrogen med det Weierstrassiska framställningssättet och de Weierstrassiska metoderna, står emellertid klart, att han redan tidigare i sina föreläsningar i Berlin meddelat allt väsentligt af sin teori. Så måste i hvarje fall ägt rum vid den föreläsning, hvilken han vintern 1859—60 samt sommaren 1860 höll öfver ämnet »Einleitung in die Analysis«, den förra 5 timmar, den senare 4 timmar i veckan (denna sista gratis), och antagligen redan vid hans föreläsning i sommaren 1857 »Allgemeine Lehrsätze betreffend die Darstellung analytischer Functionen durch convergente Reihen« (publice 1 timme i vecken).[1]

I begreppslig besittning af sin teori var Weierstrass säkerligen redan åren 1841, 1842. Enligt hvad han själf framhållit och hvilket likaså framgår ur de fyra första af honom publicerade afhandlingarna i Werke, Bd. 1, var han vid denna tid färdig med allt det väsentligaste i sin funktionsteori. Själfva basen för den Weierstrassiska funktionsteorien, det oundgängliga villkoret för den matematiska analysens aritmetisering och strängt begreppsliga uppbyggnad från grunden, är emellertid och måste vara fastställande af de båda begreppen allmänt tal och gränsställe, hvilka före Weierstrass icke kunnat tolkas

[1] »Verzeichniss der von Weierstrass an der Universität zu Berlin gehaltenen und angekündigten Vorlesungen.« Werke, Bd. 3, pag. 355, 356.

annat än genom mer eller mindre oklar geometrisk åskådning.

Heine klagar i sin afhandling »Die Elemente der Functionenlehre«,[1] publicerad 1872, samma år som Kossaks skrift, öfver att de Weierstrassiska satserna, ehuru af Weierstrass bevisade »unentbehrliche Fundamentalsätze«, dock endast äro bekanta genom dennes föreläsningar och muntliga meddelanden samt indirekt genom anteckningar efter föreläsningar och att desamma därföre allt fortfarande af många till sin riktighet betviflas. Detta är också skälet, hvarföre Heine, stödd på muntliga meddelanden af Weierstrass själf, samt med verksamt biträde af Cantor offentliggör sitt arbete. Han har emellertid enligt Cantors råd i detsamma så tillvida modifierat Weierstrass' grunddefinition, att han i stället för gruppen $((a))$ utgår från en obegränsad följd af tal, hela eller brutna

$$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots,$$

sådan, att differensen mellan ett tal u_n och ett annat u_{n+m}, om blott n väljes tillräckligt stor, oberoende af m, blir mindre än hvilket som hälst tal δ, huru litet detta än må ha blifvit fastställdt. Han benämner denna talföljd Fundamentalreihe. Denna »Fundamentalreihe« definierar nu ett visst något, som blir det nya talet: detta blir en symbol, ett tecken. Också ser sig Heine tvungen uttala: »Ich stelle mich bei der Definition auf den rein formalen Standpunkt, indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne, so dass die Existenz dieser Zahlen nicht in Frage steht.«

I själfva verket blir Cantor-Heines utgångspunkt

[1] Journal f. d. reine und angew. Math. Bd. 74, pag. 172—188.

$$\lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu,$$

hvilken definition, som vi senare skola finna, vid en framställning af den Weierstrassiska teorien i sin helhet först uppträder, när begreppen allmänt tal med mer än en grundenhet och utredningen af sådana tals väsentliga egenskaper redan ägt rum.

Begreppet gränsställe kommer hos Cantor-Heine att redan vid teoriens ingång postuleras i stället för att som hos Weierstrass bevisas. Serien $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ är ju ingenting annat än ett gränsställe för talen u_n; $n = 1, 2, 3 \ldots$ Ungefär samtidigt med Cantor-Heine har MÉRAY[1] framställt en teori för det allmänna absoluta talet, hvilket definieras på samma sätt som hos Cantor-Heine. Dessas »Fundamentalreihe« benämnes hos Méray variante. Att Méray lika litet som Cantor-Heine uppfattat det af honom införda »inkommensurabla« talet som ett verkligt tal, framgår af hans reflektion: »Telle est pour nous la nature des nombres incommensurables: ce sont des fictions permettant d'énoncer d'une manière uniforme et plus pittoresque toutes les positions relatives aux invariantes convergentes.«[2]

Samma osäkerhet uppträdde på sin tid beträffande de negativa talen och ännu nära vår tid beträffande de komplexa talen. De voro icke verkliga tal, utan en sorts symboler, å hvilka man kunde utföra i det närmaste samma räkneoperationer som å verkliga tal.

I den Weierstrassiska teorien är uppfattningen en annan. Den sammanfattning af tal, som vi kallat det allmänna,

[1] CHARLES MÉRAY, »Nouveau précis d'analyse infinitésimale«. Paris 1872.
[2] L. c. p. 4.

absoluta talet, är en skapelse, hvilken är gifven i och med det första talbegreppet samt vunnen genom tankens förmåga att tillordna hvarje tal i en talföljd 1, 2, 3, ... ν ... ett nytt tal och uppfatta det objekt, som är sammanfattningen af dessa senare tal, som en realitet, lika bestämd som den obegränsade talföljden 1, 2, 3 ...

Dedekind[1] har infört det allmänna talet från en annan synpunkt än Cantor-Heine-Méray. Hans definition är lånad från den geometriska intuitionen. Han yttrar:

»Zerfallen alle Puncte der Geraden in zwei Classen von der Art, dass jeder Punct der ersten Classe links von jedem Puncte der zweiten Classe liegt, so existiert ein und nur ein Punct, welcher diese Eintheilung aller Puncte in zwei Classen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt;«[2]
samt ytterligare:

»Ich bin ausser Stande, irgend einen Beweis für seine Richtigkeit beizubringen, und Niemand ist dazu im Stande. Die Annahme dieser Eigenschaft der Linie ist nichts als ein Axiom, durch welches wir erst der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen, durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken.«[2]

Sedt ur geometrisk synpunkt, kan Dedekinds ståndpunkt »att det allmänna talets existens icke är annat än ett axiom« motiveras. Ur aritmetisk och begreppslig däremot icke. Dedekinds geometriska definition kan emellertid, som han själf senare framhållit,[3] utan svårighet öfverföras i en rent

[1] »Stetigkeit und irrationale Zahlen«. Braunschweig 1872. 2. Aufl. 1892. Jmfr. dessutom »Was sind und was sollen die Zahlen?« Braunschweig 1888.

[2] L. c. pag. 18.

[3] »Was sind und was sollen die Zahlen?« Vorwort. Harzburg 5 okt. 1887.« Braunschweig 1887, 1893.

aritmetisk. Detta har skett hos LIPSCHITZ i hans fem år efter »Stetigkeit und irrationale Zahlen« utgifna »Lehrbuch der Analysis«.[1] När man följer Dedekind, utgår man emellertid alltid, huru man än må variera sin framställning, från två »Fundamentalreihen« eller »variantes« i stället för som hos Cantor-Heine eller Méray från blott en.

Dedekinds teori har emellertid vunnit större insteg i lärobokslitteraturen än någon annan. Förklaringen synes ligga i dess vädjan till geometrisk intuition. Man inlägger inom själfva grunden för aritmetiken en geometrisk åskådning, hvilken är och bör vara för densamma främmande, men vinner å andra sidan den skenbart större lättfattlighet, som geometriskt åskådande synes medföra.

[1] Bd. 1., Bonn 1877.

Færdig fra Trykkeriet den 23. April 1920.